PRESSES UNIVERSITAIRES DE BRUXELLES

P.U.B.
COURS-LIBRAIRIE

ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Physique I (mécanique)

Solutions des questions d'examen (2004-2010)

Pierre MARAGE

D/2010/0098/287
1e édition – Tirage 2010-11/1-S
PHYS-F-104_C

« C'est l'usage que l'homme fait de la Science qui peut être fautif et non la Science elle-même. »

Frans van den Dungen (1898-1965)
Professeur à l'ULB ; recteur en 1941, il s'oppose publiquement aux nazis par la fermeture de l'ULB et participe aux cours clandestins.

Le label FSC : la garantie d’une gestion responsable des forêts
Les Presses Universitaires de Bruxelles s’engagent !

Les P.U.B. impriment depuis de nombreuses années les syllabus sur du papier recyclé. Les différences de qualité constatées au niveau des papiers recyclés ont cependant poussé les P.U.B. à se tourner vers un papier de meilleure qualité et surtout porteur du label FSC.

Sensibles aux objectifs du FSC et soucieuses d’adopter une démarche responsable, les P.U.B. se sont conformé aux exigences du FSC et ont obtenu en avril 2010 la certification FSC (n° de certificat COC spécifique aux P.U.B. : CU-COC-809718-HA).

Seule l’obtention de ce certificat autorise les P.U.B. à utiliser le label FSC selon des règles strictes. Fortes de leur engagement en faveur de la gestion durable des forêts, les P.U.B. souhaitent dorénavant imprimer tous les syllabus sur du papier certifié FSC. Le label FSC repris sur les syllabus vous en donnera la garantie.

Qu’est-ce que le FSC ?
FSC signifie “Forest Stewardship Council” ou “Conseil de bonne gestion forestière”. Il s’agit d’une organisation internationale, non gouvernementale, à but non lucratif qui a pour mission de promouvoir dans le monde une gestion responsable et durable des forêts.
Se basant sur dix principes et critères généraux, le FSC veille à travers la certification des forêts au respect des exigences sociales, écologiques et économiques très poussées sur le plan de la gestion forestière.

Quelles garanties ?
Le système FSC repose également sur la traçabilité du produit depuis la forêt certifiée dont il est issu jusqu’au consommateur final. Cette traçabilité est assurée par le contrôle de chaque maillon de la chaîne de commercialisation/transformation du produit (Chaîne de Contrôle : Chain of Custody – COC). Dans le cas du papier et afin de garantir cette traçabilité, aussi bien le producteur de pâte à papier que le fabricant de papier, le grossiste et l’imprimeur doivent être contrôlés.
Ces contrôles sont effectués par des organismes de certification indépendants.

Les 10 principes et critères du FSC

1. L’aménagement forestier doit respecter les lois nationales, les traités internationaux et les principes et critères du FSC.
2. La sécurité foncière et les droits d’usage à long terme sur les terres et les ressources forestières doivent être clairement définis, documentés et légalement établis.
3. Les droits légaux et coutumiers des peuples indigènes à la propriété, à l’usage et à la gestion de leurs territoires et de leurs ressources doivent être reconnus et respectés.
4. La gestion forestière doit maintenir ou améliorer le bien-être social et économique à long terme des travailleurs forestiers et des communautés locales.
5. La gestion forestière doit encourager l’utilisation efficace des multiples produits et services de la forêt pour en garantir la viabilité économique ainsi qu’une large variété de prestations environnementales et sociales.
6. Les fonctions écologiques et la diversité biologique de la forêt doivent être protégées.
7. Un plan d’aménagement doit être écrit et mis en œuvre. Il doit clairement indiquer les objectifs poursuivis et les moyens d’y parvenir.
8. Un suivi doit être effectué afin d’évaluer les impacts de la gestion forestière.
9. Les forêts à haute valeur pour la conservation doivent être maintenues (par ex : les forêts dont la richesse biologique est exceptionnelle ou qui présentent un intérêt culturel ou religieux important). La gestion de ces forêts doit toujours être fondée sur un principe de précaution.
10. Les plantations doivent compléter les forêts naturelles, mais ne peuvent pas les remplacer. Elles doivent réduire la pression exercée sur les forêts naturelles et promouvoir leur restauration et leur conservation. Les principes de 1 à 9 s’appliquent également aux plantations.

FSC®

Le label FSC apposé sur des produits en papier ou en bois apporte la garantie que ceux-ci proviennent de forêts gérées selon les principes et critères FSC.

® FSC A.C. FSC-SECR-0045

FSC, le label du bois et du papier responsable

Plus d’informations ?
www.fsc.be
A la recherche de produits FSC ?
www.jecherchedufsc.be

Physique générale – PHYS-F-104
Interrogation du 30 octobre 2004

I. Théorie

1. Exprimez les unités des grandeurs suivantes en utilisant les unités fondamentales du Système international (7 points) :

a. poids …………………………………………… $kg\ m\ s^{-2}$

b. coefficient de frottement cinétique ……………… sans unités

c. vecteur vitesse …………………………………… $m\ s^{-1}$

d. moment d'une force de frottement ……………… $kg\ m^2\ s^{-2}$

e. dérivée par rapport au temps d'une accélération … $m\ s^{-3}$

f. un Newton …………………………………… .. $kg\ m\ s^{-2}$

g. quantité de mouvement …………………………… $kg\ m\ s^{-1}$

2. Quelle est la masse d'un astronaute de 80 kg sur une planète où la pesanteur est 1,5 fois la pesanteur sur Terre ? Justifiez votre réponse. (2 points)

m = 80 kg
Justif. : la masse caractérise le corps, et ne dépend pas de l'accélération qu'il subit (ne pas confondre masse et poids)

3. Que vaut le moment d'une force centripète par rapport au centre de rotation ? Justifiez votre réponse. (2 points)

Il est nul
Justif. : le moment d'une force par rapport à un point situé sur sa ligne d'action est nul (ce qui est le cas ici: une force centripète est dirigée vers le centre de rotation)
En effet, le « bras de levier » de la force est nul, ou encore le produit vectoriel est nul car l'angle entre le rayon vecteur et la force est nul

4. Qu'est-ce que la force de Coriolis ? A quoi est-elle due ? Donnez deux de ses manifestations. (4 points)

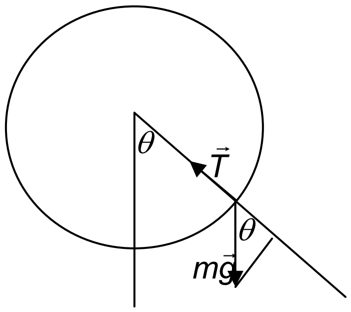
C'est une force fictive, qui apparaît dans un référentiel en rotation : un corps en mouvement inertiel (i.e. rectiligne uniforme par rapport à « l'espace absolu ») semble subir une force de même direction et de sens opposé à la vitesse instantanée du référentiel, qui induit une courbure apparente sa trajectoire.

Exemples pendule de Foucault
rotation des masses d'air (vents), des courants marins

5. Une pierre de masse m attachée à une corde de longueur L tourne dans le plan vertical autour d'un point O avec une vitesse angulaire ω. Déterminez la tension dans la corde en fonction de l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. Quelle est la condition pour que la corde reste tendue tout au long de la trajectoire ? (5 points)

La pierre doit posséder une accélération centripète, résultant de l'ensemble des forces agissant sur elles, à savoir la tension du fil et son poids.

Projetons ces forces dans la direction du centre de rotation :



$$F_c = ma_c = m\omega^2 L = T - mg\cos\theta$$
$$\Rightarrow T = m(\omega^2 L + g\cos\theta)$$

La corde reste tendue ssi $T > 0$

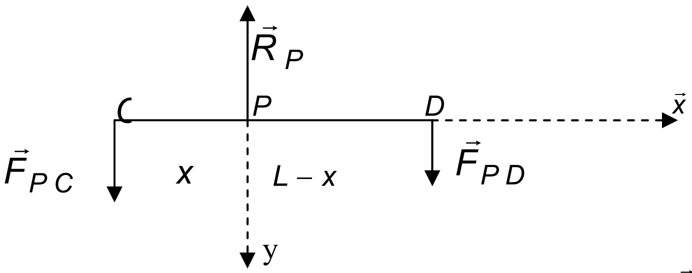
$$\Rightarrow \omega^2 L + g\cos\theta > 0 \quad \forall\theta$$
$$\Rightarrow \omega^2 L > -g\cos\theta \quad \forall\theta$$
$$\Rightarrow \omega^2 L > g \ \ (\text{cas où } \cos\theta = -1, \quad \theta = \pi)$$

Autrement dit : le cas limite est pour la verticale haute,
où la gravitation ne doit pas suffire à assurer la force centripète

$$\Rightarrow mg < m\omega^2 L \Rightarrow \omega^2 L > g$$

II. Exercices

1. Claude (25 kg) et Dominique (20 kg) sont assis aux deux extrémités d'une balançoire longue de 4,5 m (dont on néglige le poids).
Faites un schéma indiquant toutes les forces agissant sur la balançoire et donnez leurs valeurs numériques.
Si la balançoire est à l'équilibre, à quelle distance du pivot Claude est-il assis ?
(5 points)



Poids de C : $F_{PC} = m_C\, g = 250$ N

Poids de D : $F_{PD} = m_D\, g = 200$ N

1. $\Sigma\vec{F} = 0$ - projetons sur l'axe y

$\Rightarrow F_{PC} + F_{PD} + R_P = 0 \quad \Rightarrow R_P = -450$ N

2. $\Sigma\vec{\tau}_P(\vec{F}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_P(\vec{F}_{PC}) + \vec{\tau}_P(\vec{F}_{PD}) + \vec{\tau}_P(\vec{R}_P) = 0$$
$$\Rightarrow \vec{r}_{PC} \times \vec{F}_{PC} + \vec{r}_{PD} \times \vec{F}_{PD} + 0 = 0$$
$$\Rightarrow |\vec{r}_{PC}| \cdot 250\ \mathrm{N} - |\vec{r}_{PD}| \cdot 200\ \mathrm{N} = 0$$
$$\Rightarrow 250\ x = 200(L - x) \quad \Rightarrow 450\ x = 200\,L \quad \Rightarrow x = 2{,}0\ \mathrm{m}$$

2. Une malle de 200 kg est traînée sur le sol à vitesse constante, en exerçant sur elle une force horizontale de 200 N.
a) Que vaut le coefficient de frottement entre le sol et la malle ?
b) Quelle force faut-il exercer pour tirer deux malles identiques à la même vitesse, si elles sont attachées l'une derrière l'autre ?
c) idem, si elles sont posées l'une sur l'autre ?
d) Quelle force faut-il exercer pour tirer deux malles identiques à une vitesse double, si elles sont attachées l'une derrière l'autre ?
(5 points)

a) $F_f = \mu_c \cdot F_N$ où F_N = réaction normale du sol $= m\,g = 200\ kg \cdot 10\ ms^{-2} = 2{,}0\,10^3 N$

$\Rightarrow \mu_c = 200\ N / 2{,}0\,10^3 N = 0{,}10$

b) F_N est doublée par rapport à a) $\Rightarrow F_f$ est doublée $\Rightarrow F_f = 400\ N$

c) idem

d) F_f ne dépend pas de la vitesse $\Rightarrow F_f = 400\ N$ (cf. b))

$\Rightarrow$ force de traction = $400\ N$ car la force totale doit etre nulle

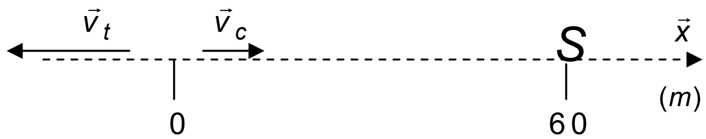
(sinon il y aurait une accélération et la vitesse ne serait pas constante)

3. Alors qu'il lui reste de l'air pour 10 minutes, un cosmonaute de 100 kg, qui a emporté hors de la station une trousse à outils de 2,0 kg, se rend compte avec effroi que ses rétrofusées ne répondent plus.
Que doit-il faire pour rejoindre la station par ses propres forces avant d'avoir épuisé ses réserves d'air si, au moment où il se rend compte de l'accident, il est éloigné de la station de 60 m et
a) s'il se déplace dans l'espace à la même vitesse que la station ;
b) s'il s'en éloigne lentement à la vitesse de 0,36 km/h.
Soyez complets et précis dans vos réponses !
(5 points)

Le cosmonaute *c* doit jeter sa trousse à outils *t* dans la direction opposée à celle de la station *S.*
a) temps restant = 600 s, distance à parcourir = 60 m ➔ vitesse minimale pour arriver à temps
= 60 m / 600 s = 0,10 m/s

Conservation de la quantité de mouvement totale (pas de forces extérieures), qui était et reste nulle : selon l'axe x = l'axe station – cosmonaute :

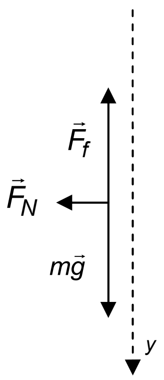
$$m_c v_c - m_t v_t = 0 \Rightarrow v_t = \frac{m_c v_c}{m_t}$$



$\Rightarrow$ vitesse minimale de la trousse $v_t = \dfrac{100\,kg \cdot 0{,}10\,m/s}{2{,}0\,kg} = 5{,}0\,m/s$

b) Il s'éloigne initialement de la station avec une vitesse (négative) de 0,36 km/h = 0,10 m/s
Pour rejoindre la station, il doit donc acquérir une vitesse de 0,20 m/s, double de celle du cas a)
Il doit donc jeter sa trousse à une vitesse double = 10 m/s

4. Le « Rotor » de la Foire du Midi est un manège cylindrique, qui peut atteindre une vitesse d'un tour par seconde. La paroi verticale est en bois ; on considère que le coefficient de frottement statique entre les vêtements des passagers et le bois est de 0,20.
On veut pouvoir escamoter le plancher quand le « Rotor » tourne à pleine vitesse, sans danger pour les passagers.
Questions :
a) les dimensions du « Rotor » doivent-elle obéir à certaines conditions ? si oui, lesquelles ?
b) y a-t-il une condition sur le poids maximum des passagers ? si oui, laquelle ?
(5 points)



Un passager de masse m subit une force centripète, due à la réaction normale de la paroi :

$F_N = m\,\omega^2 R$, où ω est la vitesse angulaire du Rotor et R son rayon;

$\omega = 1\ \text{tour}/s = 2\pi\ rad/s$

La force de frottement (maximale) est

$F_f = \mu_S F_N = \mu_S\, m\,\omega^2 R$

Elle doit etre au moins égale (et opposée) au poids

$$\Rightarrow \quad \mu_S\, m\,\omega^2 R \geq m\,g \Rightarrow \quad R \geq \frac{g}{\mu_S\,\omega^2} \quad \Rightarrow R \geq \frac{10\ m s^{-2}}{0{,}20 \cdot (2\pi)^2 s^{-2}} = 1{,}3\ m$$

Il n'y a pas de condition sur le poids des passagers (m ne figure pas dans l'équation)

PHYS-F-104
Interrogation du 5 novembre 2005

I. Théorie (20 points – 45 min.)

1. Du haut d'une tour, on laisse tomber à la verticale un boulet de 10 kg, et simultanément on lance à l'horizontale une pierre de 0,5 kg. Lequel des deux objets arrivera-t-il au sol le premier ? Pourquoi ? (On néglige tous les frottements).
(3 points)

Les deux objets arrivent au sol simultanément.
En effet, leur temps de chute n'est déterminé que par leur mouvement vertical (le mouvement horizontal de la pierre est sans effet sur la chute).
Or l'accélération verticale des deux corps est la même : c'est l'accélération de la pesanteur.

2. Soit un corps animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération s'exprime en fonction du temps selon la loi empirique : a = C t + D

a. Quelles sont les unités de C et D, exprimées dans le système international ?
b. Quelle est la loi donnant la vitesse en fonction du temps ?

(4 points)

a. $[C] = [a / t] = m\ s^{-3}$
$[D] = [a] = m\ s^{-2}$

b. $v = \int_{t_0}^{t} a\,dt + cte = \frac{1}{2}C(t-t_0)^2 + D(t-t_0) + v_0$ où v_0 est la vitesse à l'instant initial t_0

3. Définir le moment d'une force par rapport à un point (définir chacune des grandeurs utilisées). Dans quelles unités s'exprime le moment d'une force ?
(4 points)

Le moment par rapport au point O d'une force $\vec{F}$, appliquée en un point A, est donné par le produit vectoriel $\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\vec{F}\right| \sin(\overrightarrow{OA},\vec{F})\,\vec{1}_\perp$ où le vecteur $\vec{1}_\perp$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$, et dont le sens dépend de la convention choisie

Unités : $kg\ m^2\ s^{-2}$

6. Un avion volant horizontalement à la vitesse constante de 700 km/h lâche une bombe. Peut-on calculer à quelle vitesse l'ombre de la bombe se déplace sur le sol ? Si oui, que vaut-elle ?
(on néglige les frottements sur la bombe)
(3 points)

Ayant été lâchée sans vitesse initiale par rapport à l'avion, la bombe garde la même vitesse horizontale que celui-ci (principe de l'inertie) ; elle reste donc à la verticale de l'avion. L'ombre de la bombe se déplace donc sur le sol à la même vitesse que l'ombre de l'avion, soit 700 km/h.
(On a négligé la courbure de la Terre, de même que la distance Terre – avion par rapport à la distance Terre – Soleil).

4. Une pierre de 10 kg est suspendue par une corde au toit d'un ascenseur.
Quelle est la tension dans la corde pour chacun des cas suivants :
a. l'ascenseur est à l'arrêt ;
b. l'ascenseur part vers le haut avec une accélération de 2 m s^{-2} ;
c. le câble soutenant l'ascenseur casse, et celui-ci tombe en chute libre.
La corde est supposé sans masse et inextensible ; on néglige les frottements.
(3 points)

L'accélération verticale de la pierre est due à la somme des forces qui agissent sur elle, à savoir la force gravitationnelle, dirigée vers le bas, et la force exercée sur la pierre par la corde, dirigée vers le haut (qu'on choisit comme sens positif).

a. La pierre étant au repos (par rapport au monde extérieur), son accélération est nulle, et la somme des forces qui s'exercent sur elle est donc nulle : la tension par la corde est donc égale et opposée à la force gravitationnelle : T = m g = 100 kg m s^{-2}

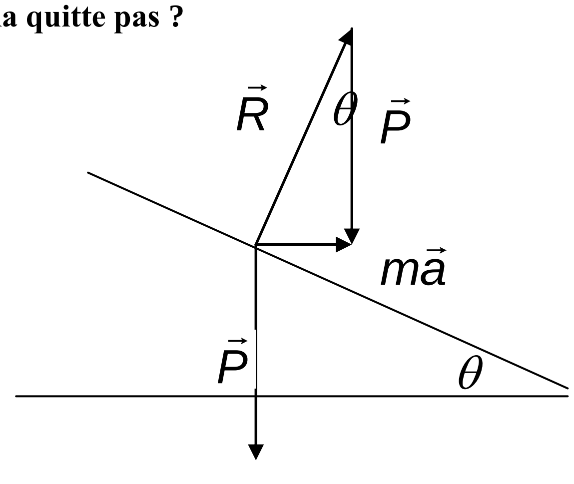
b. L'accélération verticale de la pierre est due à la somme des forces qui agissent sur elle :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} = 10 \cdot 2\, kg\, m\, s^{-2}.$$

Avec le sens positif choisi vers le haut, la tension est donc T = m a + m g = 120 kg m s^{-2}

c. La pierre tombe en chute libre (comme l'ascenseur lui-même), et son accélération est donc l'accélération gravitationnelle : a = g. Il ne s'exerce pas d'autre force sur la pierre que la gravitation, et a tension dans la corde est donc nulle.

5. Une voiture arrive à la vitesse v dans une courbe formant un arc de cercle de rayon R. Si la route est verglacée et que tous les frottements sont nuls, quelle doit être l'inclinaison de la route pour que la voiture ne la quitte pas ?
(4 points)



Deux forces s'exercent sur la voiture :
son poids $\vec{P}$ et la réaction du sol $\vec{R}$

Comme les frottements sont nuls, la réaction du sol lui est perpendiculaire, et fait un angle θ avec la verticale.

La composante verticale de la réaction est

$$R_V = R\cos\theta = -P$$

La force centripète permettant à la voiture de rester sur la route, en décrivant une trajectoire circulaire, est donc la composante horizontale de la réaction du sol :

$$R_H = R\sin\theta = \frac{P}{\cos\theta}\sin\theta = P\,\mathrm{tg}\theta$$

Selon les lois du mouvement circulaire, cette force doit également être égale à m v^2 / R

$$\frac{mv^2}{R} = P\,\mathrm{tg}\theta = mg\,\mathrm{tg}\theta \Rightarrow \mathrm{tg}\theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{v^2}{Rg}$$

II. Exercices (20 points – 1 h.)

1. Un boulet de canon est tiré du pont d'un navire, situé 5,0 m au-dessus du niveau de la mer, avec une vitesse de 40 m/s et à un angle de 30° par rapport à l'horizontale.
A quelle distance du navire le boulet touchera-t-il la mer ?
(5 points)

Prenons l'origine (0,0) au point de lancement du boulet, l'axe x horizontalement dans la direction du boulet, l'axe z verticalement vers le haut.
La composante horizontale de la vitesse du boulet est $v_{0x} = v_0 \cos\theta$
La composante verticale de la vitesse du boulet est $v_{0z} = v_0 \sin\theta$
Il faut déterminer la position x du boulet au temps où sa hauteur z correspond au niveau de la mer (-5m)
Mouvement vertical, accéléré :

$$z = -\frac{1}{2} g\ t^2\ +\ v_0 \sin\theta t = \text{-}5{,}0\ m$$

$$5{,}0 t^2 - 40 \cdot \frac{1}{2} t - 5{,}0\ m = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100+25}}{5} = 4{,}24 s \quad \text{(prendre la solution positive)}$$

Mouvement horizontal, uniforme :

$$x = v_0 \cos\theta t = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4{,}24 = 147 \text{ m} = 1{,}5\ 10^2 \text{ m}$$

2. Un avion décrit dans le plan vertical un looping selon une trajectoire circulaire. Alors que le pilote, de 80 kg, est au sommet de sa trajectoire, la tête en bas, la vitesse de l'avion est de 360 km/h., et la force que le pilote exerce sur son siège est 1/3 de son poids. Quel est le rayon de la trajectoire ?
(5 points)

Au sommet de la trajectoire, la résultante des forces exercées sur le pilote est une force centripète dirigée vers le bas, égale à mv^2/R, où v = 360 km/h = 100 m/s.
A ce moment s'exercent sur le pilote :
- la force de gravité mg, dirigée vers le bas
- la force de réaction exercée sur lui par son siège, qui vaut 1/3mg et est également dirigée vers le bas.

On a donc $mv^2/R = 4/3\ mg \rightarrow R = 3/4\ v^2/g = 3/4\ 10^4 / 10 = 750$ m

3. Un bloc de 20 kg est lâché sur un plan incliné à 30°, sans frottement, à partir d'un point situé à une hauteur de 5 m au-dessus du pied du plan.
Quelle distance parcourt-il au pied du plan incliné sur une surface horizontale avec laquelle le coefficient de frottement cinétique est 0,2 ?
(5 points)

La vitesse atteinte par le bloc ne dépend que de la composante verticale de l'accélération et de la composante verticale du déplacement, les composantes horizontales de l'accélération et du déplacement ne contribuant en rien à la vitesse acquise :

$$v_1^2 = v_0^2 + 2a_1 \cdot s_1 = 0 + 2 \cdot g \cdot h = 2 \cdot 10\,m/s^2 \cdot 5\,m = 100\,m^2/s^2 \Rightarrow v_1 = 10\,m/s$$

La force de frottement au pied du plan est $F_f = \mu_c\, m\, g$
La distance parcourue est (on prend le sens positif selon le mouvement)

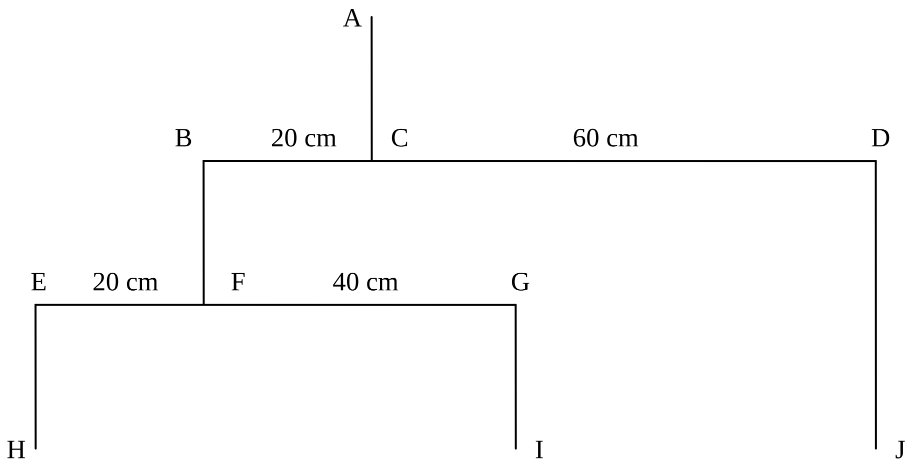
$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_2 \cdot s_2 \Rightarrow 0 = 100\,m^2/s^2 + 2 \cdot \left(-\frac{F}{m}\right) \cdot s_2 = 100\,m^2/s^2 + 2 \cdot \left(-\frac{\mu_c\, m\, g}{m}\right) \cdot s_2$$

$$\Rightarrow s_2 = 100\,m^2/s^2 \cdot \frac{1}{2\,\mu_c\, g} = 25\,m$$

NB On peut trouver la vitesse du bloc au pied du plan de la manière suivante.
La longueur qu'il parcourt sur le plan incliné est h / sin θ.
La composante de l'accélération de la gravitation parallèle au plan est g . sin θ
On a donc bien :

$$v^2 = v_0^2 + 2as = 2 \cdot g \sin\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} = 2 \cdot g \cdot h$$

4. Un mobile a la structure décrite ci-dessous. Une masse de 100 g est suspendue en J. Quelles masses doivent être accrochées en H et en I pour équilibrer le mobile ? (on néglige les masses des éléments de structure).
(5 points)



Par rapport au point C, le moment du poids accroché en D est

$\tau_C(m_D\ g) = 0{,}60\ m\ .\ 0{,}1\ kg\ .\ g = 0{,}06\ g\ kg\ m$.

Le moment du poids accroché en B doit donc également être 0,06 g *kg m* ;

$\tau_C(m_B\ g) = 0{,}20\ m\ .\ m_B\ .\ g = 0{,}06\ g\ kg\ m \rightarrow m_B = 0{,}30\ kg$

On a donc $m_H + m_I = 0{,}30\ kg$

Par rapport au point F, les moments des poids accrochés en H et I doivent être égaux et de signes opposés :

$\tau_F(m_H\ g) = \tau_F(m_I\ g)$

soit

$0{,}20\ m\ .\ m_H\ g = 0{,}40\ m\ .\ m_I\ g = 0{,}40\ m\ .\ (0{,}30\ kg - m_H)\ .\ g$

$0{,}20\ m_H\ m = 0{,}12\ kg.m - 0{,}40\ m_H\ m \rightarrow 0{,}60\ m_H\ m = 0{,}12\ kg.m$

$\rightarrow$ $m_H = 0{,}20\ kg$ $\quad m_I = 0{,}10\ kg$

PHYS-F-104
Physique
Interrogation du 03-11-2007

1. Un objet tiré par une force de grandeur *F* est en mouvement sur une surface horizontale.
Quelle est la force de frottement qui s'exerce sur cet objet
a. quand la traction est horizontale et que le mouvement est uniforme ?
b. quand la force de traction fait avec l'horizontale un angle θ, si la masse du corps est *m* et le coefficient de frottement cinétique μ_c ?

a. Comme le mouvement est uniforme (càd à vitesse constante), l'accélération est nulle, et donc la somme des forces exercées sur le corps dans la direction du mouvement est nulle.
La force de frottement est donc –F.
b. La force de frottement $F_f = \mu_c F_N$, F_N étant la valeur absolue de la composante normale de la réaction du support.
La réaction F_N du support est égale et opposée à la résultante des forces exercées par l'objet sur le support, soit $F_N = mg - F \sin\theta$.
Donc : $F_f = \mu_c (mg - F \sin\theta)$, et elle est dirigée contre le mouvement.

2. Comment peut-on mesurer au laboratoire la constante de Newton ?

En utilisant la balance de torsion. C'est un dispositif consistant en un fil (vertical) soutenant une barre (horizontale) aux extrémités de laquelle sont disposées deux sphères homogènes de masse *m*. On approche de celles-ci, de manière symétrique, deux autres sphères de masses *M* >> *m*, les centres des masses *m* et *M* étant séparées par la distance *d*. L'attraction exercée par les masses *M* sur les masses *m* fait tourner le fil d'un angle donné. Connaissant la réponse du fil à une torsion provoquée par une force donnée, on peut en déduire la force d'attraction exercée par les masses *M* sur les masses *m*, et donc la constante de Newton à partir de la formule $F = G\, m\, m' / d^2$

3. Etablissez (c.-à-d. « démontrez ») la troisième loi de Kepler (relation entre la période T de rotation de la planète autour du Soleil et le rayon R de son orbite), dans l'approximation où la trajectoire est circulaire.

L'accélération centripète est due à la force de gravitation, soit
$m\, \omega^2 R = G\, M_S\, m / R^2$, où M_S est la masse du Soleil, m celle de la planète, et $\omega = 2\pi / T$
soit $R\, 4\, \pi^2 / T^2 = G\, M_S / R^2 \Rightarrow T^2 / R^3 = 4\, \pi^2 / G\, M_S = \text{cte}$.

4. La phrase suivante peut être soit correcte, soit incorrecte, selon le sens donné aux mots : « L'accélération d'un corps est égale à la variation par rapport au temps de sa vitesse ». Expliquez comment il faut entendre cette phrase pour qu'elle soit correcte.

La phrase est correcte si l'on entend par « accélération » l'accélération vectorielle, et par « vitesse » la vitesse vectorielle.
En effet, il s'agit de la définition même de l'accélération : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Par contre, la phrase est en général incorrecte si l'on entend par « accélération » le module de l'accélération, et par « vitesse » le module de la vitesse (càd la vitesse scalaire). En effet, le changement de <u>module</u> de la vitesse donne lieu à la composante tangentielle de l'accélération, alors que le changement de <u>direction</u> du vecteur vitesse donne lieu en outre à la composante normale de l'accélération (vectorielle).
La phrase est cependant correcte pour la vitesse vectorielle comme pour la vitesse scalaire quand le mouvement est rectiligne.

5. Un bloc de 20 kg se met à glisser depuis le sommet d'un plan incliné à 30° par rapport à l'horizontale, long de 2,0 m et pour lequel le coefficient de frottement cinétique est de 0,30.
Arrivé au pied du plan incliné, il parcourt une distance de 6 m sur un sol horizontal parfaitement lisse.
Il se trouve alors devant un autre plan incliné, identique au premier. Quelle distance parcourra-t-il sur ce deuxième plan incliné avant de s'arrêter ?

Sur le premier plan, l'accélération du bloc, parallèle au plan, multipliée par sa masse, est donnée par la somme des composantes des forces parallèles au plan :
- la composante de la force de gravitation parallèle au plan, dirigée vers le pied du plan et dont le module est $m\ g\ \sin\theta$
- la force de frottement, qui s'oppose au mouvement et est donc dirigée vers le haut (elle s'oppose à l'effet de la gravitation), donnée par $F_f = \mu_c F_N$, le module de la composante normale de la réaction du plan étant $F_N = m\ g\ \cos\theta$.

L'accélération du corps, dirigée vers le pied du plan est donc (la masse m se simplifie)
$a = g\ (\sin\theta - \mu_c \cos\theta) = 2{,}40\ \text{m s}^{-2}$ (1)
La vitesse du bloc au pied du plan est donnée par la relation
$v^2 = v_0^2 + 2\ a\ s$ (2)
Comme la vitesse initiale est nulle, on trouve que $v^2 = 9{,}61\ (\text{m/s})^2$ (ou encore $v = 3{,}1$ m/s)

Sur le sol lisse, le bloc conserve cette vitesse, qui est donc sa vitesse au pied de deuxième plan.

L'accélération du bloc sur le deuxième plan, multipliée par sa masse, est donnée par
- la composante de la force de gravitation parallèle au plan, $m\ g\ \sin\theta$, dirigée vers le pied du plan
- la force de frottement, donnée comme pour le premier plan, par $F_N = m\ g\ \cos\theta$, qui s'oppose au mouvement et est donc également dirigée vers le bas.

L'accélération du corps, dirigée vers le pied du plan est donc cette fois
$a = g\ (\sin\theta + \mu_c \cos\theta) = 7{,}60\ \text{m s}^{-2}$ (3)
En utilisant la relation
$v^2 = v_0^2 + 2\ a\ s$ (4)
avec cette fois $v = 0$ et $v_0^2 = 9{,}61\ (\text{m/s})^2$, on trouve que
$s = 0{,}63$ m.
C'est la distance parcourue par le bloc sur le deuxième plan avant de s'arrêter.

Sans calculer les valeurs numériques intermédiaires, on arrive en utilisant les relations (1) à (4) à la formule suivante (où *s* est la distance cherchée et *d* la distance sur le premier plan):
$s = d\ .\ (\sin\theta - \mu_c \cos\theta) / (\sin\theta + \mu_c \cos\theta)$

PHYS-F-104
Physique
Interrogation du 31-10-2008
I. Théorie (10 points – 40 min.)

1. En partant de la définition de la vitesse, démontrez dans le cas d'un mouvement circulaire que la vitesse est tangente à la trajectoire.
(3 points)

$\vec{r} = r\,\vec{1}_r$ avec $\vec{1}_r = \cos\theta\,\vec{1}_x + \sin\theta\,\vec{1}_y$

Vitesse :

$$\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{1}_v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{1}_r)}{dt} = r\,\frac{d(\vec{1}_r)}{dt} = r\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{1}_x + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{1}_y\right) = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{1}_T$$

car on vérifie géométriquement que $\vec{1}_T = -\sin\theta\,\vec{1}_x + \cos\theta\,\vec{1}_y$

La vitesse est donc selon la tangente à la trajectoire :
les vecteurs $\vec{1}_v$ et $\vec{1}_T$ ont meme direction

2. Démontrez la loi de Kepler portant sur la relation entre la période et le rayon de la trajectoire (supposée circulaire) d'une planète.
(2 points)

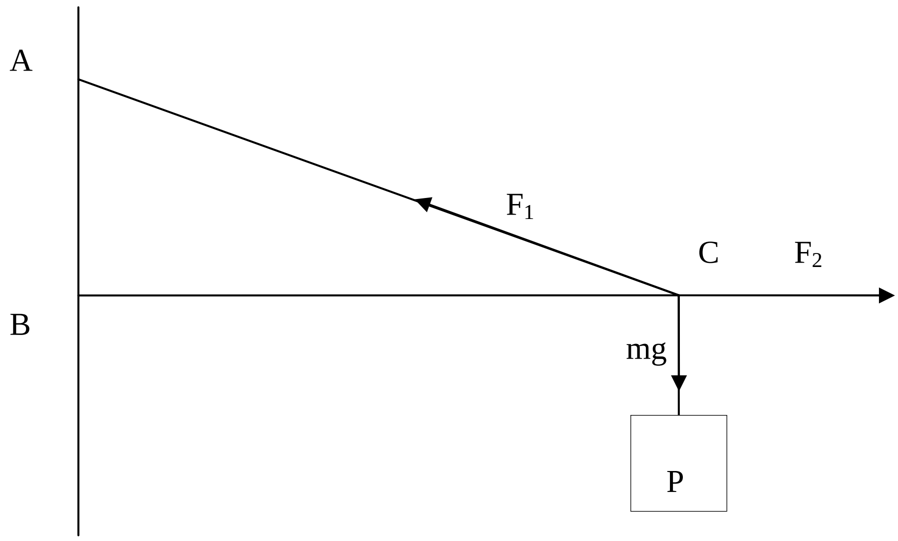
Le mouvement circulaire est dû à la force d'attraction de Newton, qui joue le rôle de force centripète

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R \text{ où } \omega = 2\pi / T \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = Cte$$

3. a. On déplace un meuble à vitesse constante sur le sol. Faut-il tirer plus fort pour vaincre le frottement si la vitesse est plus élevée ? Pourquoi ?
b. Pour un meuble deux fois plus lourd que le précédent, faut-il tirer deux fois plus fort pour le déplacer à la même vitesse constante ? Pourquoi ?
c. Le meuble est initialement immobile, puis on le met en mouvement avec une force constante. Pour atteindre une vitesse plus élevée, faut-il nécessairement tirer avec une force plus grande ? Expliquez.
(3 points)

a. Non : vitesse constante => force de traction = force de frottement, qui est indépendante de la vitesse
b. Oui, car la force de traction = force de frottement, qui est proportionnelle à la réaction normale du sol, ici égale au poids.
c. Non, une force plus faible, mais excédant la force de frottement, exercée pendant un temps plus long peut amener à la même vitesse, car Δ (mv) = (F+F_f) Δt (2ème loi de Newton).

4. Décrivez les forces exercées par le mur AB pour que le dispositif suivant soit à l'équilibre, un poids P étant accroché en C et la direction BC étant perpendiculaire au mur AB. Indiquez s'il faut que les liaisons soient des cordes ou des poutres.
(2 points)



En C, le poids P doit être compensé par la force F_1, qui doit donc avoir une composante verticale et être dirigée de C vers A. Le mur exerce donc en A une traction, et AC doit être un câble.
En C, la composante horizontale vers la gauche de F_1 doit être compensée par la force F_2 , qui est horizontale et doit donc être orientée de B vers C. F_2 doit donc être due à une poussée du mur, et la liaison BC doit être une poutre.

II. Exercices (10 points – 1 heure)

1. Une balle de 30 g frappe un bloc de bois de 10 kg placé sur une surface horizontale et s'y encastre. Sous le choc, le bloc se déplace de 3,0 m. Le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et la surface étant de 0,28, quelle était la vitesse de la balle au moment du choc ?
(on néglige les effets de la déformation du bloc sous l'impact)
(3 points)

Frottement : $F_f = \mu_c mg \Rightarrow a_{bloc} = \mu_c g$, sens opposé au mouvement du bloc (+ balle incrustée)

Parcours du bloc : $v_f^2(bloc) = v_0^2(bloc) + 2as$ avec s = 3,0 m et a = -$\mu_c g$

$\Rightarrow v_0(bloc) = \sqrt{2\mu_c gs} = 4{,}10$ m/s

Conservation de la quantité de mouvement : $v_{balle}m_{balle} = v_{bloc+balle}m_{bloc+balle}$

$v_{balle} = 4{,}10 \text{ m/s} \cdot 10kg \, / \, 0{,}03kg = 14\,10^2$ m/s

2. Placée au niveau du sol, une bombarde du XVIème siècle est capable de lancer des boulets de 80 kg à 60m (portée maximale).
Si elle est installée en haut d'une tour de 30m, quelle distance atteindra-t-elle si elle tire sous un angle de 35° par rapport à l'horizontale ?
(on néglige les frottements de l'air, ce qui est une très mauvaise approximation !)
(4 points)

La portée maximale s_P est pour un angle de lancement de 45°, et vaut

$$s_P = \frac{2v_0^2}{|\vec{g}|}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \Rightarrow v_0^2 = s_P g = 600\ (\text{m/s})^2 .$$

Les équations du tir sont :

$$x = v_0 \cos\theta\, t$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\, t \Rightarrow \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\sin\theta\, t - y = 0 \Rightarrow t = \frac{-v_0\sin\theta \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gy}}{g}$$

où g = -10 ms^{-2} et y = -30m.

C'est la solution - qui doit être retenue, sinon le numérateur est > 0 et *t* est < 0

$$x = \frac{v_0^2}{|g|}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta + \cos\theta\sqrt{\sin^2\theta + C}\right] \quad \text{où} \quad \frac{v_0^2}{|g|} = 60 \text{ m et } C = \frac{2gy}{v_0^2} = \frac{2\cdot 10\cdot 30}{600} = 1{,}00$$

Pour θ = 35°, x = 85 m.
NB que pour θ = 45°, x = 82 m. En ce cas, l'angle optimal n'est donc pas 45° !

3. Un manège fait 12 tours par minute. Une personne située à 4,0 m du centre lance une balle vers l'avant, dans la direction perpendiculaire à celle du centre du manège. Au moment du lancer, la vitesse de la balle par rapport à la personne est de 3,0 m/s.
Donnez la vitesse de la balle pour un observateur situé à l'extérieur du manège.
(3 points)

La vitesse angulaire ω du manège est de (12 . 2π) rad / 60 s = 2π/5 rad/s.
La vitesse du lanceur est de v = ω R = 8π/5 m/s = 5,03 m/s, et elle est tangente à la trajectoire.
La balle est lancée dans la même direction, avec une vitesse relative de 3,0 m/s.
Ces deux vitesses s'ajoutent donc, et la vitesse de la balle pour un observateur extérieur (inertiel) est de 8,0 m/s, dans la direction tangente à la trajectoire au moment du lancer.

PHYS-F-104
Physique
Interrogation du 28 octobre 2009
I. Théorie (10 points – 40 minutes)

1. L'accélération d'un corps en mouvement rectiligne est donnée par la loi suivante :
a = A t + B, où A et B sont des constantes

- **a. Quelles sont les unités de A et B ?**
- **b. Quelle est la loi donnant la distance parcourue en fonction du temps ?**

(2 points)

a. $[A] = m\ s^{-3}$ $[B] = m\ s^{-2}$
b. $v = ½\ A\ t^2 + B\ t + v_0$
$l = 1/6\ A\ t^3 + ½\ B\ t^2 + v_0\ t$

2. Il existe des mouvements pour lesquels la vitesse est constante mais l'accélération ne l'est pas. Donnez l'exemple d'un tel mouvement, en définissez très précisément ce qu'il faut entendre ici par « vitesse » et par « accélération ».
(2 points)

Mouvement circulaire uniforme :
- la vitesse scalaire est constante ;
- l'accélération vectorielle varie : la direction de la composante normale (centripète) de l'accélération varie.

3. Etablissez la relation entre le rayon *R* de l'orbite et la période *T* de rotation d'une planète autour du Soleil, en supposant les orbites circulaires.
(2 points)

La force centripète du mouvement de rotation est donnée par l'attraction gravitationnelle de Newton :

$$m\,\omega^2\,R = G\frac{m\,M_S}{R^2} \Rightarrow \omega^2\,R^3 = cte$$

Comme $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{R^3}{T^2} = cte$

4. Donnez l'expression (« formule ») de la force de frottement entre solides et justifiez-la par les lois empiriques sur lesquelles elle est basée (expliquez en détail).
(2 points)

$$\vec{F}_f = -\mu\left|\vec{F}_N\right|\vec{1}_v$$

1. La force de frottement est dirigée contre le mouvement : elle est proportionnelle au vecteur $\vec{1}_v$ et lui est opposée (signe -).
2. Elle est proportionnelle en module à la réaction normale du sol.
3. Elle ne dépend que de la nature des surfaces en contact (coefficient de frottement μ).

5. Enoncez les trois lois de Newton pour la mécanique (ne donnez pas seulement leur « titre », mais énoncez leur contenu).
(2 points)

1. Première loi (loi d'inertie)
Tout corps qui n'est pas soumis à l'action de forces extérieures persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme

2. Deuxième loi (variation de la quantité de mouvement)
Une force extérieure $\vec{F}$ agissant sur un corps pendant un temps Δt modifie la quantité de mouvement $\vec{p}$ du corps de la quantité $\vec{F} \cdot \Delta t$.
Autre formulation : $\vec{F} = m\,\vec{a}$, où $\vec{a}$ est l'accélération du corps

3. Troisième loi (action - réaction)
Deux corps en interaction exercent l'un sur l'autre des forces égales en intensité et de sens opposés.

II. Exercices (10 points – 1 heure 15 minutes)

1. Une fusée de 7200 kg (carburant compris) se déplace à la vitesse de 1500 m/s.
On décide de modifier sa trajectoire d'un angle de 1,00°, en allumant brièvement les moteurs. Les tuyères sont orientées de manière telle que les gaz de combustion soient expulsés perpendiculairement à la direction initiale, à la vitesse de 2400 m/s.
Quelle quantité de gaz faut-il brûler ?
(4 points)

A la fin de l'expulsion des gaz, de masse m_2, la masse de la fusée est $(m_1 – m_2)$ et sa vitesse v_2.
Conservation de la quantité de mouvement :
- selon la direction initiale, x :

$$m_1\, v_{1x} = (m_1 - m_2)\, v_{2x} \qquad (1)$$

- selon la direction perpendiculaire, y :

$$0 = (m_1 - m_2)\, v_{2y} - m_2\, v_{gaz} \qquad (2)$$

Or $v_{2y} = v_{2x}\,\mathrm{tg}\,\theta$

=> (2) devient : $(m_1 - m_2)\, v_{2x}\,\mathrm{tg}\,\theta = m_2\, v_{gaz}$

On porte dans (1) :

$m_1\, v_{1x} = m_2\, v_{gaz} / \mathrm{tg}\,\theta$

=> $m_2 = m_1\, v_{1x}\,\mathrm{tg}\,\theta / v_{gaz}$

=> m_2 = 7200 kg . 1500 m/s . 0.017 / 2400 = 78,6 kg

2. Deux personnes qui pèsent 750 N chacune sont à bord d'une barque dont la masse est de 80 kg. La barque se déplace à la vitesse de 0,50 m/s, en faisant un angle de 45° par rapport à la rive ; il n'y a pas de courant. Au moment où la barque est éloignée de la rive de 50 cm, un retardataire pesant 700 N arrive en courant à 18 km/h et saute sur la barque, dans la direction du mouvement de celle-ci. En négligeant les frottements, à quelle distance de la rive la barque sera-t-elle 5 s après le saut du retardataire ?
(3 points)

Conservation de la quantité de mouvement dans la direction du mouvement de la barque, la vitesse du retardataire étant de 5,0 m/s et celle de la barque chargée du retardataire étant v :

(1500 + 800) . 0,50 + 700 . 5,0 = (1500 + 800 + 700) . v

=> v = (1150 + 3500) / 3000 = 1,55 m/s

Composante de la vitesse de la barque, dans la direction perpendiculaire à la rive :

v sin 45° = 1,096 m/s

Distance entre la barque et la rive après 5 s : 1,096 m/s . 5 s + 0,50 m = 6,0 m

3. Une certaine corde casse si on y suspend un objet dont la masse est supérieure à 8,00 kg.
On accroche à l'extrémité de cette corde, longue de 1m, une pierre de 1,00 kg, que l'on fait tourner dans le plan vertical. La corde risque-t-elle de casser ? Si oui, dans quelles circonstances exactement ? Si non, pourquoi ?
(3 points)

La tension maximale dans la corde est de 80 N.
La tension est maximale quand la pierre est dans la position la plus basse, et elle vaut

$T_{max} = m\, g + m\, \omega_{max}^2\, R$

=> la corde casse si $m\, \omega_{max}^2\, R$ = 70 N => ω_{max} = 8,37 rad/s

PHYS-F-104
Physique
Examen du 17 janvier 2005

I. Théorie (20 points)

1. Définissez (au moyen de formules impliquant d'autres grandeurs physiques) et donnez les unités dans le Système international de
(6 points)

- moment cinétique d'un point matériel

$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$ où $\vec{r}$ est la distance du point matériel au point O et $\vec{p}$ sa quantité de mouvement

unités : kg m^2 s^{-1}

- moment d'inertie d'un système

Le moment d'inertie d'un système est défini par rapport à un axe de rotation :

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2\, dm$$

où r_i est distance entre chaque constituant du système, de masse m_i, et l'axe de rotation

unités : kg m^2

- module de Young

$E = \sigma / \varepsilon = \dfrac{F}{S}\dfrac{1}{\Delta L / L_0}$ où σ est la contrainte $\dfrac{F}{S}$ et ε est la déformation $\Delta L / L_0$

unités : kg m^{-1} s^{-2}

- quantité de mouvement

$\vec{p} = m\vec{v}$ où m est la masse d'un point matériel et $\vec{v}$ sa vitesse

unités : kg m s^{-1}

2. Exprimez la vitesse de propagation d'une onde en fonction de sa fréquence (et éventuellement d'autres grandeurs physiques)
(2 points)

$v = \lambda \nu$ où λ est la longueur d'onde et ν la fréquence

3. Enoncez les lois de la statique pour un système de points matériels ; définissez les symboles que vous utilisez.
(4 points)

1. La somme vectorielle des forces extérieures $\vec{F}_{ext}$ agissant sur le système doit être nulle

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

2. La somme vectorielle des moments $\vec{\tau}_O$ des forces extérieures agissant sur le système, par rapport à tout point O, doit être nulle

$$\sum \vec{\tau}_O (\vec{F}_{ext}) = 0$$

4. Enoncez la loi de Hooke, et établissez la forme de l'énergie potentielle d'un ressort obéissant à loi de Hooke ; définissez les symboles que vous utilisez.
(3 points)

L'élongation $\vec{s}$ d'un ressort est proportionnelle à la force $\vec{F}_e$ exercée : $\vec{F}_e = k\vec{s}$

La force de rappel étant donc $\vec{F} = -k\vec{s}$, l'énergie potentielle est

$$E_P = -\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int k\vec{s}\, d\vec{s} = \int k s\, ds = \tfrac{1}{2} k s^2$$

5. Etablissez l'équation de continuité pour un fluide non visqueux et incompressible ; définissez les symboles que vous utilisez.
(2 points)

$S_1\, v_1 = S_2\, v_2$
où v_1 et v_2 sont les vitesses du fluide aux sections droites S_1 et S_2 d'un tube de courant.

En effet, comme le fluide est non visqueux et incompressible, les quantités de matière de masse Δm_1 et Δm_2 traversant, en un temps Δt, les surfaces S_1 et S_2 du tube de courant doivent être les mêmes. Dès lors,

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \;\Rightarrow\; \rho \Delta V_1 = \rho \Delta V_2 \quad \text{puisque le fluide est incompressible (densité } \rho \text{ constante)}$$

$$\Rightarrow\; \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \;\Rightarrow\; S_1 \frac{\Delta l_1}{\Delta t} = S_2 \frac{\Delta l_2}{\Delta t} \;\Rightarrow\; S_1\, v_1 = S_2\, v_2$$

6. Expliquez, au choix, l'effet de la direction du vent ou l'effet du gradient de température de l'air sur la propagation des sons ; comment appelle-t-on le phénomène physique ?
(3 points)

Dans les deux cas, il s'agit d'un phénomène de réfraction, c.-à-d. de changement de direction d'un front d'ondes passant d'un milieu à un autre, où les vitesses de propagation des ondes sont différentes :

- effet du vent : la vitesse du vent étant plus élevée en hauteur qu'au sol, les ondes sonores sont rabattues vers le sol quand le vent se propage vers l'observateur, et au contraire défléchies vers le haut quand le vent se propage dans le sens inverse
- effet de la température : si la température de l'air est la plus élevée près du sol (cas d'un sol chauffé par le soleil, durant une après-midi d'été), la vitesse des ondes sonores est la plus grande près du sol (car la vitesse du son augmente avec la température), et le front d'ondes est défléchi vers le haut. Au contraire, si la température est la plus basse près du sol (le matin par exemple), les ondes sonores s'y propagent plus lentement, et le front d'ondes est rabattu vers le sol.

PHYS-F-104
Physique
Examen du 17 janvier 2005

II. Exercices (20 points)

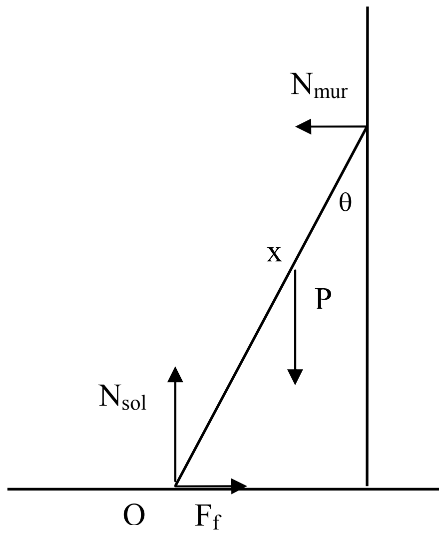
1. Une masse de 10,0 g, tourne dans le plan horizontal. Elle est attachée au bout d'une fil sans masse, qui s'enroule autour d'un mince axe vertical .
Si la rotation s'effectue en 2,00 secondes quand la masse est distante de l'axe de 1,00 m, quelle est la vitesse (scalaire) de la masse quand cette distance n'est plus que de 10,0 cm ? Justifiez.
(4 points)

$v_1 = \omega r_1 = (2\pi / T) r_1 = 3{,}14\ m/s$

Conservation du moment cinétique :

$v_1 r_1 = v_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 r_1 / r_2 = 31{,}4\ m/s$

2. Une échelle de longueur L et de masse négligeable est posée sur un plancher rugueux, de coefficient de frottement statique μ, et appuyée contre un mur parfaitement lisse ; elle fait un angle θ avec la verticale.
Une personne de masse m monte l'échelle.
Représentez sur un schéma les forces qui agissent sur l'échelle ; justifiez.
Jusqu'à quelle fraction x de la longueur L la personne peut-elle monter sans que l'échelle ne glisse ?
(4 points)



Le système est à l'équilibre $\Rightarrow$

1. la somme des forces extérieures est nulle
   projection horizontale : $\vec{F}_f = -\vec{N}_{mur}$ (1)
   projection verticale : $\vec{N}_{sol} = -\vec{P}$
2. la somme des moments des forces extérieures par rapport à un point quelconque O est nulle
   Prenons O au pied de l'échelle :
   $\vec{\tau}_O(\vec{P}) + \vec{\tau}_O(\vec{N}_{mur}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x L P \sin\theta - L N_{mur} \cos\theta = 0$ (2)
3. propriété de la force de frottement : $F_f = \mu P$ (normes des forces)
   En portant dans (1), on a donc : $\mu P = N_{mur}$ (pour les normes) (3)

En portant (3) dans (2), on a : $x L P \sin\theta - L \mu P \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mu / \tan\theta$

3. Une bille de masse m est accrochée à un fil de longueur L accroché à un clou.
Le fil est écarté de la verticale, jusqu'à ce que la bille atteigne la hauteur h par rapport au point le plus bas ; elle est alors lâchée.
Au point le plus bas, la bille cogne une autre bille, de même masse et pendue à un fil de même longueur attaché au même clou. Le choc est parfaitement élastique.
Après le choc, à quelles hauteurs s'élèvent les deux billes ? Justifiez.
(4 points)

Il s'agit de la collision élastique entre deux billes de mêmes masses, dont l'une est au repos. Dès lors (voir cours), elles échangent leurs énergies cinétiques : la bille initialement en mouvement s'arrête (elle restera immobile au point le plus bas), et cède toute sont énergie cinétique à l'autre bille.
Par conservation de l'énergie, l'énergie cinétique de la bille initialement au mouvement était, au moment du choc, $1/2\ m\ v^2 = m\ g\ h$.
C'est aussi l'énergie cinétique de la seconde bille juste après le choc. Comme les deux billes sont de même masse, cette énergie cinétique, transformée en énergie potentielle, permettra à la seconde bille de monter à la hauteur *h* dont était partie la première bille.

5. Un camion de 7,0 tonnes arrive à la vitesse de 72 km/h au bas d'une colline de 100 m d'altitude, après avoir parcouru 3,0 km depuis le sommet de la colline.
Ce parcours peut-il être parcouru « en roue libre », c'est-à-dire sans utiliser le moteur ?
Si oui, quelle énergie a-t-elle été dissipée sous forme de frottements (freins et frottements aérodynamiques) lors de la descente ?
Si non, quelle énergie minimale a-t-il fallu dépenser pour arriver au pied de la colline à cette vitesse ?
(3 points)

La différence entre l'énergie potentielle du camion au sommet de la colline et son énergie cinétique au bas de la colline est de

$\Delta E = m\ g\ h - 1/2\ m\ v^2 = 7\ 10^3\ (\ 10\ .\ 10^2 - 1/2\ 4\ 10^2)\ J = 5{,}6\ 10^6\ J$

(la vitesse au bas de la colline étant de *20 m/s*)

Cette différence étant positive, l'énergie potentielle excédait l'énergie cinétique, et le parcours a pu être effectué sans utiliser le moteur, l'énergie ΔE étant dissipée en frottements.

4. Un liquide, supposé non visqueux et incompressible, est contenu dans un récipient cylindrique, ouvert à l'air libre et posé sur le sol.

Deux trous sont percés l'un au-dessus de l'autre dans la paroi latérale du récipient, respectivement aux hauteurs y_1 et y_2 par rapport au sol. Le liquide atteint la hauteur h au-dessus du trou supérieur (y_2).

Le liquide s'échappe horizontalement des deux trous, et les deux jets atteignent le niveau du sol à la même distance d du bord inférieur du récipient.

Déterminez la hauteur h du liquide au-dessus du trou supérieur.

(5 points)

Les deux jets sont la combinaison d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement vertical accéléré dans le champ de la pesanteur – cf. problèmes de balistique
Considérons le liquide qui sort du trou 1.

Son temps de chute pour atteindre le sol, est t_1, et la loi de la chute des corps donne :

$$y_1 = 1/2\, g\, t_1^2$$

Pendant ce temps t_1, ce liquide parcourt horizontalement la distance d à la vitesse horizontale constante v_1 :

$$d = v_1\, t_1 = v_1\, \sqrt{(2\, y_1 / g)}$$

De manière similaire, on a

$$d = v_2\, \sqrt{(2\, y_2 / g)}$$

En égalant ces deux relations, on a :

$$v_1\, \sqrt{(y_1)} = v_2\, \sqrt{(y_2)}$$

ou encore, en élevant au carré :

$$v_1^2\; y_1 = v_2^2\; y_2 \qquad (1)$$

Le théorème de Torricelli stipule que la vitesse d'écoulement du liquide pour un cas semblable à celui-ci est : $v^2 = 2\, g\, H$, où H est la hauteur de liquide au-dessus du trou.
On a donc ici :

$$v_1^2 = 2\, g\, (h + \Delta y) \qquad v_2^2 = 2\, g\, h$$

où $\Delta y = y_2 - y_1$ est la différence d'altitude entre les deux trous.
On porte ces relations dans *(1)* :

$$2\, g\, (h + \Delta y)\, y_1 = 2\, g\, h\, y_2$$

$$h\, y_1 + \Delta y\;\, y_1 = \;h\, y_2$$

$$\Delta y\;\, y_1 = \;h\, (y_2 - y_1) = h\, \Delta y \qquad \text{par définition de } \Delta y$$

La condition à remplir est donc :

$$h = y_1$$

PHYS-F-104
Examen du 6 juin 2005

I. THEORIE

1. a. Définissez le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe de rotation ; définissez les symboles que vous utilisez.
b. Calculez le moment d'inertie d'une tige homogène de masse *M* et de longueur *L* pivotant autour de l'une de ses extrémités.
c. idem pour une rotation autour de son centre.
(4 points)

a. Moment d'inertie I_O pour la rotation d'un solide autour d'un axe passant O :

$I_O = \sum_i m_i\, r_i^2$ où r_i est la distance entre la masse m_i et l'axe O,

la somme portant sur tous les éléments de masse du corps

$= \int_V r^2\, dm = \int_V r^2 \rho\, dV$ si la densité $\rho = \dfrac{M}{V}$ est constante, M étant la masse de l'objet et V son volume

b.

$I_O = \int_0^L r^2\, dm$ où $dm = \rho\, dx = \dfrac{M}{L}\, dx$; ici, à une seule dimension, $r = x$

$$= \int_0^L x^2 \frac{M}{L}\, dx = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\, dx = \frac{1}{3}\frac{M}{L}\, x^3\Big]_0^L = \frac{1}{3} M\, L^2$$

c.

$$I_O = 2\int_0^{L/2} r^2\, dm = 2\int_0^{L/2} x^2 \frac{M}{L}\, dx = 2\,\frac{1}{3}\frac{M}{L}\, x^3\Big]_0^{L/2} = \frac{1}{12} M\, L^2$$

2. Etablissez la formule de l'effet Doppler pour un observateur immobile par rapport au milieu dans lequel le son se propage.
(3 points)

Soit V la vitesse de propagation de l'onde sonore, et V_S la vitesse de la source par rapport au milieu, et donc aussi à l'observateur.
Supposons que la source se dirige vers l'observateur.
Après un temps *t*, la distance entre la source et le front d'onde qui avait été émis en t = 0 est $(V - V_S)\, t$. Le nombre d'ondes émises par la source à ce temps *t* est $(\nu_S\, t)$.
La longueur d'onde correspondante est donc $\lambda = (V - V_S)\, t / \nu_S t = (V - V_S) / \nu_S$
L'observateur perçoit cette onde sonore avec une fréquence $\nu_O = V / \lambda = \nu_S V / (V - V_S)$
On a donc : $\nu_O / \nu_S = V / (V - V_S)$; la fréquence paraît plus grande (son plus aigu).
Si la source s'éloignait de l'observateur, on aurait : $\nu_O / \nu_S = V / (V + V_S)$. La fréquence paraîtrait plus petite (son plus grave)

3. Un objet de masse *m* est accroché à un ressort de constante de rappel *k* obéissant à la loi de l'oscillateur harmonique. Etablissez l'équation du mouvement de l'objet. Donnez la fréquence ν de l'oscillation.
(4 points)

Loi de Hooke, ou oscillateur harmonique (à une dimension)

$$F = m\,a = -k\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \qquad (1)$$

La solution de cette équation différentielle est : $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

En effet, on a bien :

$$v_x = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \qquad a_x = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \qquad \text{idem (1)}$$

Fréquence : $\omega = 2\pi / T = 2\pi\,\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

4. Expliquez pourquoi le toit en tissu d'une voiture décapotable se gonfle vers l'extérieur quand elle roule à grande vitesse.
(2 points)

La pression régnant dans la voiture est la pression atmosphérique.
Comme la voiture se déplace rapidement, l'air autour d'elle doit la contourner, avec une grande vitesse.
Par le théorème de Bernouilli, la pression à la surface extérieure de la voiture est donc plus faible que la pression atmosphérique. Cette dépression explique le gonflement de la bâche. C'est l'« effet Venturi ».

(Noter que, en fait, le théorème de Bernouilli ne s'applique pas rigoureusement, en particulier parce que l'air n'est pas incompressible).

5. Une sphère se met à rouler sans glisser le long d'un plan incliné.
a. Peut-on supposer que le plan incliné est parfaitement lisse et pourquoi ?
b. Le temps mis pour atteindre le bas du plan incliné est-il plus court, le même ou plus long que pour un objet de même masse, partant de la même hauteur et glissant sans frottement le long d'un plan incliné de même pente ? (nécessité de justifier la réponse)
c. Expliquez si la vitesse atteinte au bas du plan incliné est plus petite, la même ou plus grande que pour un objet de même masse glissant sans frottement le long d'un plan incliné de même pente ? (nécessité de justifier la réponse)
(3 points)

a. Non, car le roulement sans glissement implique que le coefficient de frottement statique soit non nul
b. L'accélération de la sphère le long du plan incliné est plus faible que dans le cas du glissement sans frottement, en raison de la force de frottement. Le temps pour atteindre la bas

du plan incliné est donc plus long, puisque pour un mouvement uniformément accéléré : $t^2 = 2\,d\,/\,a$

c. La vitesse est plus petite. En effet, l'énergie potentielle gravitationnelle disponible au début du mouvement doit ici se répartir en énergie cinétique de translation du centre de masse *plus* l'énergie cinétique de rotation.

6. Une pierre de 0,10 kg suspendue à une ficelle longue de 1,0 m oscille librement, en s'écartant de la verticale d'un angle maximum de 30 degrés.
Un obstacle est introduit sur le trajet de la ficelle à 50 cm sous son point de fixation, et vient contrarier les oscillations.
a. avant l'introduction de l'obstacle, à quelle hauteur par rapport au point le plus bas montait la pierre ?
b. après introduction de l'obstacle, à quelle hauteur la pierre monte-t-elle
- du côté où la ficelle oscille librement ?
- du côté où est placé l'obstacle ?
c. avant l'introduction de l'obstacle, quelle était la vitesse de la pierre à la verticale du point de fixation de la ficelle ?
d. après introduction de l'obstacle, quelle est la vitesse de la pierre à la verticale du point de fixation de la ficelle
- quand la pierre provient du côté où la ficelle se déplace librement ?
- de l'autre côté ?
Justifiez toutes vos réponses.
(4 points)

a. h_{max} = 1,0 m (1 – cos 30°) = (1 - √3 / 2) = 0,13 m

b. Dans les deux cas, la pierre remonte à la même hauteur, en raison de la conservation de l'énergie mécanique (potentielle + cinétique). Les points les plus hauts correspondent en effet à *la même* énergie potentielle (*mgh*), l'énergie cinétique y étant nulle.

c. Par conservation de l'énergie potentielle + cinétique, respectivement au point le plus haut et au point le plus bas :

$mgh + 0 = 0 + 1/2\ m v^2 \Rightarrow v^2 = 2\ g\ h \Rightarrow v = 1,6$ m/s

d. Dans les deux cas, la pierre passera à la verticale du point de fixation même vitesse, en raison de la conservation de l'énergie mécanique : au point le plus bas, l'énergie potentielle est complètement transformée en énergie cinétique.

II. EXERCICES

1. Une balle de fusil de 20 g, se déplaçant à la vitesse de 400 m/s, vient s'encastrer dans une boule de plomb de 2000 g suspendue à un fil de 2 m de long.
De quelle hauteur va s'élever la boule de plomb ?
(4 points)

Notons _b les paramètres concernant la balle, _p ceux notant la boule de plomb et _tot ceux du système (boule + balle) après le choc.
Conservation de la quantité de mouvement :

- La direction du système (boule + balle) après le choc est celle de la balle avant le choc
  => équation à une dimension :
- m_b . v_b + m_p . v_p = m_tot . v_tot , avec v_p = 0 et m_tot = m_b + m_p
  => v_tot = m_b . v_b / m_tot = 4,0 m/s

L'énergie cinétique du système (qui forme un pendule) se transforme en énergie potentielle gravitationnelle :
  => 1/2 m_tot . v_tot^2 = m_tot g h
  => h = v_tot^2 / 2g = 0,8 m

2. Un mécanicien travaille sur une roue de 20 kg, d'un diamètre de 40 cm.
a. Quel est le moment d'inertie de cette roue, si elle est assimilée à un disque homogène ?
b. Le mécanicien constate, quand il fait tourner la roue dans le plan vertical (l'axe étant donc horizontal), qu'elle s'arrête toujours dans la même position. Que se passe-t-il ? Que peut-on dire de la position du centre de masse de la roue à ce moment-là ?
c. Le mécanicien décide donc d'équilibrer la roue, en plaçant un plomb sur la jante (c'est-à-dire sur la circonférence de la roue). Comment sait-il où il doit placer le plomb ?
d. Il détermine expérimentalement qu'il doit placer un plomb de 30 grammes. Comment trouve-t-il cette valeur ?
e. A quelle distance de l'axe se trouvait le centre de masse de la roue ?
f. De combien a été modifié le moment d'inertie de la roue ?
g. Quelle proportion de l'inertie de la roue cela représente-t-il ? Comparez avec le rapport des masses, et expliquez ce que vous observez.
(4 points)

a. Le moment d'inertie est $I = 1/2\ M R^2 = 0,5 . 20 . (0,20)^2 = 0,4$ kg m^2.
b. Comme la roue s'arrête toujours sur la même position, c'est que son centre de masse est alors à la verticale sous l'axe (position d'équilibre stable).
c. Il doit donc placer le plomb, sur la roue à l'arrêt, à la verticale de l'axe, de manière diamétralement opposée au centre de masse.
d. Il ajuste la masse de plomb à placer de manière à équilibrer la roue, ce qu'il vérifie par le fait que désormais celle-ci s'arrête dans une position quelconque.
e. Maintenant que la roue est en équilibre, le moment (par rapport à l'axe) de la force de gravitation agissant sur le système est nul. On a donc, en notant $\_{roue}$ les quantités non équilibrées, et d_ les distances algébriques à l'axe : $m_{roue} . d_{roue} + m_{plomb} . d_{plomb} = 0$

⇨ $|d_{roue}| = 0,030$ kg . 0,20 m / 20 kg = 30 10^{-5} m

Le centre de masse de la roue est situé à 0,30 mm de son axe.

f. Le moment d'inertie supplémentaire dû au plomb est

$I_{plomb} = m r^2 = 0,03$ kg . $(0,2\ m)^2 = 12\ 10^{-4}$ kg m^2.

g. Ceci représente 3 10^{-3} du moment d'inertie de la roue, alors que le rapport des poids est de 1,5 10^{-3}. Le rapport plus grand des moments d'inertie est dû au fait que le plomb est posé à la circonférence de la roue, et que la contribution de chaque masse au moment d'inertie va comme le carré de la distance à l'axe.

3. Un bloc de 2,0 kg part du repos sur un plan incliné parfaitement lisse, à une hauteur de 40 cm au-dessus du pied du plan incliné. Il glisse ensuite sur une distance de 83 cm le

long d'une surface horizontale rugueuse avant de s'arrêter. Quel est le coefficient de frottement cinétique de la surface horizontale ?
(4 points)

La première partie du mouvement est gouvernée par la force gravitationnelle conservative, la deuxième par la force de frottement non conservative.
Sur l'ensemble du mouvement, l'énergie potentielle gravitationnelle est complètement transformée en travail de la force de frottement (puisque l'objet s'arrête, il ne reste pas de composante d'énergie cinétique).
On a donc :

$$m\,g\,h = \int \vec{F_f} \cdot d\vec{s} = \mu_c\, m\,g\,d, \text{ puisque } \vec{F}_f = \mu_c \left|\vec{F}_N\right| \vec{1_s} = \mu_c\, m\,g\,d\,\vec{1_s}$$

$$\Rightarrow \mu_c = h/d = 0{,}40 \text{ m} / 0{,}83 \text{ m} = 0{,}48$$

NB. On peut aussi trouver ce résultat de la manière suivante.
La conservation de l'énergie mécanique pendant la première partie du mouvement permet de calculer la vitesse acquise par l'objet au pied du plan incliné :
$mgh = 1/2\ m\,v_0^2 \Rightarrow 1/2\ v_0^2 = g\,h$ (1)
Comme la force de frottement sur le plan horizontal est constante (elle ne dépend que du poids de l'objet), le mouvement y est uniformément accéléré (ici décéléré)
$\Rightarrow v_{fin} = a\,t + v_0 = 0 \Rightarrow t = -\,v_0 / a$
On a donc : $d = 1/2\ a\,t^2 + v_0\,t = 1/2\ a\,t^2 - a\,t^2 = -1/2\ a\,t^2 = -\,1/2\ v_0^2 / a$
$\Rightarrow a = -\,1/2\ v_0^2 / d = -\,g\,h / d$ par (1)
L'accélération (décélération) est due à la force de frottement :
$F_f = ma \Rightarrow |F_f| = \mu_c\,|F_N| = \mu_c\,m\,g = m\,|a| = m\,g\,h/d$
$\Rightarrow \mu_c = h / d$

4. L'amplitude angulaire d'un pendule est de 0,15 rad et sa vitesse au point le plus bas est de 0,68 m/s. Quelle est sa période d'oscillation ?
(4 points)

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = L(1-\cos\vartheta) \Rightarrow L = \frac{v^2}{2g(1-\cos\vartheta)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} = 2\pi\sqrt{\frac{v^2}{2g^2(1-\cos\vartheta)}} = 1{,}25\ s$$

5. Une scie circulaire de 18,0 cm de diamètre part du repos et atteint 5300 tours/min en 1,50 s.
Quelle est son accélération angulaire, supposée constante ?
Calculez le vecteur accélération d'un point de la circonférence après 1,00 s ?
Quelle est la direction du vecteur accélération d'un point de la circonférence quand la scie a atteint un régime de vitesse angulaire constante ?
(4 points)

vitesse angulaire après 1,5 s : $\omega = 5300$ tours / min = $2\pi\ 5300/60$ rad / s

accélération angulaire : $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{2\pi\ 5300/60\ rad/s}{1{,}5\ s} = 370$ rad / s^2 ,

vitesse angulaire atteinte après 1 s : $\omega_1 = \omega_0 + \alpha\ t = 0 + \alpha\ t = 370$ rad / s

accélération d'un point de la circonférence : $\vec{a} = a_T \overrightarrow{1_T} + a_N \overrightarrow{1_N}$

$a_T = \alpha\ r =$ (370 rad / s^2) 0,09 m = 33,3 m s^{-2}

$a_N = \omega^2 r =$ (370 rad / s)^2 0,09 m = 1,23 10^4 m s^{-2}

PHYS-F-104
Examen du 18 août 2005

I. Théorie (20 points – 1 heure)

(Pour les corrections, les vecteurs sont le cas échéant indiqués en lettres grasses)

1. Enoncez sous forme d'une formule la loi de la gravitation de Newton.
Définissez les symboles utilisés et donnez leurs unités dans le système international.
(5 points)

$$\vec{F_G} = -G\frac{M\,m}{d^2}\vec{1_r}$$

$\vec{F_G}$ (unités : kg m s^{-2}) est le vecteur représentant la force exercée sur le corps de masse m (« attiré ») par le corps de masse M (« attirant ») (unités des masses : kg)
d est la distance entre les centres des deux corps (unités : m)
$\vec{1_r}$ est le vecteur de longueur unité dirigé du centre du corps de masse M vers le centre du corps de masse m ; pas d'unités
G est la « constante de Newton » ; unités : N . m^2 / kg^2 = m^3 s^{-2} kg^{-1}

2. Expliquez pourquoi la section du jet d'eau qui s'écoule (verticalement, vers le bas) d'un robinet diminue lorsque la distance au robinet augmente.
(3 points)

Le volume total d'eau s'écoulant par unité de temps à travers une section transverse est égal à la section multipliée par la vitesse d'écoulement. Celle-ci augmente avec la distance au robinet (mouvement accéléré dans le champ de gravitation). Par conservation de la masse (« équation de continuité »), la section du jet doit donc diminuer.
(Remarquez que le rétrécissement du jet peut le conduire à se fragmenter sous l'effet des forces de tension superficielle).

3. Enoncez les lois empiriques du frottement cinétique pour le cas corps solide contre corps solide. Exprimez-les au moyen d'une formule unique, en montrant comment celle-ci exprime les lois que vous avez formulées.
(5 points)

Les forces de frottement solides
- sont proportionnelles à la réaction normale exercée par la surface de contact (1)
- dépendent de la nature des surfaces en contact (2)
- sont indépendantes de l'aire de contact (3)
- sont dirigées dans la direction opposée au mouvement (4)

Autrement dit :

$$\vec{F_f} = -\mu_c \left|\vec{N}\right| \vec{1}_V$$

Cette formule traduit la relation de proportionnalité (1) entre la grandeur de la force de frottement et la grandeur de la réaction normale. Le coefficient μ_c ne dépend que de la nature des surfaces en contact (2), et pas de leur aire (3). Le vecteur unitaire $\mathbf{1_v}$ et le signe – traduisent la propriété (4)

4. La machine d'Atwood consiste en un système de deux masses, m_1 et m_2, accrochées aux deux extrémités d'un fil (inextensible et de masse négligeable) passant sur une poulie.
En négligeant tous les effets autres que la gravitation, exprimez l'accélération de la masse m_1 en fonction de m_1, m_2 et g (l'accélération de la gravitation).
Discutez le résultat obtenu (décrire qualitativement, discuter les cas particuliers utiles pour les valeurs des masses).
(5 points)

Les forces exercées sur chaque masse sont la tension ***T*** du fil (dirigée vers le haut) et son poids *m* ***g*** (dirigé vers le bas).
En projetant sur l'axe vertical (sens + vers le bas), on a :

masse 1 $\quad m_1\, a_1 = m_1\, g - T_1 \qquad (1)$
masse 2 $\quad m_2\, a_2 = m_2\, g - T_2 \qquad (2)$

Comme le fil est inextensible et sans masse, la tension dans le fil est constante :

$$T_1 = T_2 \qquad (3)$$

D'autre part, comme les masses sont solidaires et le fil inextensible, leurs accélérations sont égales en grandeur et opposées en signe :

$$a_2 = -\, a_1 \qquad (4)$$

En soustrayant membre à membre (2) de (1), on a :

$$(m_1 + m_2)\, a_1 = (m_1 - m_2)\, g$$
$$a_1 = (m_1 - m_2)\, g \,/\, (m_1 + m_2)$$

On voit que la chute est ralentie par rapport à la chute libre (accélération g), puisque

$$(m_1 - m_2) \,/\, (m_1 + m_2) < 1$$

On retrouverait l'accélération g si m_2 était nulle
Si les deux masses étaient égales, elles resteraient à l'équilibre (a = 0)

5. On se réfère à la question précédente (machine d'Atwood).
En réalité, même si tous les frottements sont négligeables, la valeur mesurée pour l'accélération de la masse m_1 est différente de la valeur calculée ci-dessus. Pourquoi ?
(2 points)

L'accélération est en réalité plus petite que la valeur calculée ci-dessus, en raison de l'inertie de la poulie, qui s'oppose à sa rotation et donc au mouvement des masses.

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Une grenade suspendue à un fil explose en trois fragments.
Le premier fragment, qui a une masse de 40 grammes, part horizontalement vers la gauche avec une vitesse de 100 m/s.
Le deuxième, d'une masse de 80 g, part horizontalement vers la droite en faisant un angle de 60° (compté dans le sens trigonométrique) avec la direction du premier, également avec une vitesse de 100 m/s.
La masse du troisième fragment étant de 40 grammes, quelles sont la grandeur de sa vitesse et sa direction ?
(4 points)

La grenade est au repos, sa quantité de mouvement est nulle.
La quantité de mouvement (vectorielle) totale des fragments doit donc également être nulle.

Appelons Ox l'axe horizontal défini par le premier fragment, avec les x positifs vers la droite, Oy l'axe horizontal qui lui est perpendiculaire, et Oz l'axe vertical.

On a donc trois équations scalaires :

$p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} = 0 \Rightarrow p_{3x} = - p_{1x} - p_{2x}$ (1)

$p_{1y} + p_{2y} + p_{3y} = 0 \Rightarrow p_{3y} = - p_{1y} - p_{2y}$ (2)

$p_{1z} + p_{2z} + p_{3z} = 0 \Rightarrow p_{3z} = - p_{1z} - p_{2z}$ (3)

Fragment 1 $p_{1x} = m_1 v_{1x} = - 0{,}040 \,.\, 100$ kg m s^{-1} $= - 4{,}0$ kg m s^{-1}
$p_{1y} = 0$
$p_{1z} = 0$

Fragment 2 $p_{2x} = m_2 v_{2x} = 0{,}080 \,.\, 100 \,.\, \cos(+60)$ kg m s^{-1} $= 4{,}0$ kg m s^{-1}
$p_{2y} = m_2 v_{2y} = 0{,}080 \,.\, 100 \,.\, \sin(+60)$ kg m s^{-1} $= 6{,}93$ kg m s^{-1}
$p_{2z} = 0$

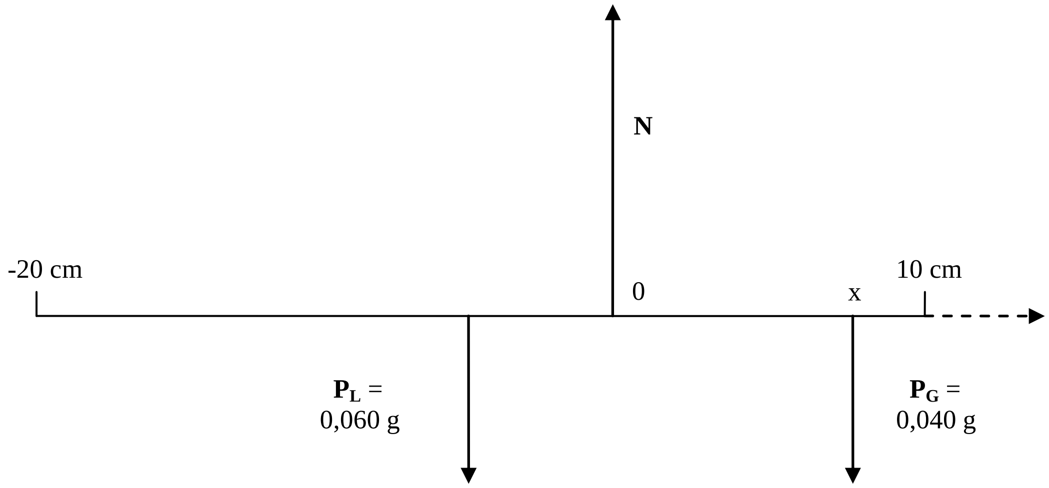
Fragment 3 $p_{3x} = - p_{1x} - p_{2x} = 0$
$p_{3y} = - p_{1y} - p_{2y} = - 6{,}93$ kg m s^{-1}
$\Rightarrow v_{3y} = p_{3y} / m_3 = - 6{,}93 / 0{,}040 = 173$ m s^{-1}
$p_{3z} = - p_{1z} - p_{2z} = 0$

La grandeur de la vitesse du troisième fragment est de 173 m s^{-1}.
Sa direction est dans le plan horizontal, perpendiculaire à celle du premier fragment, du côté opposé au deuxième fragment.

2. Une latte homogène de 30 cm de long et pesant 60 g est posée sur une table, perpendiculairement au bord ; elle dépasse le bord de la table de 10 cm. Une gomme de 40 g est posée sur la latte, du côté du vide.
Faites un schéma représentant l'ensemble des forces s'exerçant sur la latte et calculez leur valeur.
A quelle distance maximale du bord de la table peut être posée la gomme pour que la latte ne tombe pas ?

(Indication : considérez le cas limite où il faut éviter la rotation de la latte autour du bord de la table)
(4 points)

Le problème revient à trouver la position de la gomme, telle que la latte soit en équilibre si elle était posée sur un pivot situé au bord de la table.
Plaçons l'axe x selon la latte, et prenons la position du pivot (le bord de la table) comme origine.
(Les vecteurs sont indiqués en lettres grasses)



Les forces exercées sont
- le poids $\mathbf{P_L}$ = 0,060 **g** kg de la latte, qui s'exerce en son milieu, soit en -5 cm
- le poids de la gomme $\mathbf{P_G}$ = 0,040 **g** kg, dirigée vers le bas, appliquée à la distance x de l'origine
- la réaction **N** de la table.

Selon la première loi de la statique, la somme vectorielle des forces exercées sur le corps doit être nulle. On trouve donc que la réaction de la table, dirigée vers le haut, est de grandeur
$|\mathbf{N}|$ = 0,100 $|\mathbf{g}|$ kg = 1 N; par hypothèse, elle est appliquée au bord de la table.

Selon la deuxième loi de la statique, la somme vectorielle des moments des forces appliquées doit être nulle, par rapport à n'importe quel point O.

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}_L) + \vec{\tau}_O(\vec{P}_G) + \vec{\tau}_O(\vec{N}) = 0$$

Choisissant le point O à l'origine, cette relation devient (cos (P, x) = 1 : perpendiculaires) :

$|\mathbf{P_L}|$. (-0,05 m) + $|\mathbf{P_G}|$. (x) + 0 = 0

x = (60 10^{-3} $|\mathbf{g}|$ kg. 0,05 m / (40 10^{-3} $|\mathbf{g}|$ kg)

x = 3/40 m = 0,075 m = 7,5 cm

3. Une balle de 20 g tirée horizontalement avec une vitesse de 200 m/s est arrêtée après avoir parcouru 20 cm dans une butte de terre humide, où elle subit une décélération uniforme.
Quelle quantité d'énergie a-t-elle été transférée à la butte, et quelle force moyenne a-t-elle exercé sur la butte ?
(4 points)

Toute l'énergie cinétique de la balle a été transférée à la butte (sous forme de chaleur) par les forces de frottement qui ont arrêté la balle :

$\Delta E_{butte} = - \Delta E_{balle} = - (0 - 1/2\ m\ v_i^2)$

$\Delta E_{butte} = 0{,}5\ 20\ 10^{-3}$ kg . $(200\ m/s)^2 = 4{,}0\ 10^2$ kg $m^2\ s^{-2} = 4{,}0\ 10^2$ J

Le changement d'énergie cinétique de la balle est égal au travail fourni par la balle (travail de la force de frottement) :

$\Delta E_{balle} = \Delta W.$

Celui-ci est donné par

$$\Delta W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \int ds = -F\ \Delta s$$

car la force F est constante (décélération constante), et elle est opposée au mouvement

(cos (**F**, d**s**) = -1).

Comme la force est constante, elle est égale à la force moyenne exercée, et vaut donc

$F = - \Delta W / \Delta s = - \Delta E_{balle} / \Delta s = \Delta E_{butte} / \Delta s = 4{,}0\ 10^2$ kg $m^2\ s^{-2}$ / 0,2 m

$F = 20\ 10^2$ kg m $s^{-2} = 2{,}0\ 10^3$ N

Remarque :

On peut également déterminer la force exercée sur la butte de la manière suivante.

La force de freinage étant constante (puisque l'accélération est constante), la deuxième loi de Newton peut s'exprimer :

$\Delta p = F\ \Delta t$ (1)

Comme l'accélération est uniforme, on peut utiliser le théorème de la vitesse moyenne :

$\Delta s = v_m\ \Delta t$ où $v_m = 1/2\ (v_f + v_i)$ avec $v_f = 0$ et $v_i = 200$ m/s

(1) -> $F = \Delta p / \Delta t = m\ \Delta v / (\Delta s / v_m)$ où $\Delta v = v_f - v_i$

$F = m\ \Delta v\ v_m / \Delta s = m\ (v_f - v_i)\ 1/2\ (v_f + v_i) / \Delta s = 1/2\ m\ (v_f^2 - v_i^2) / \Delta s$

$F = 0{,}5\ 20\ 10^{-3}$ kg $(200\ m/s)^2 / (0{,}2\ m) = 10\ 10^{-3}\ 4\ 10^4\ 5$ kg m $s^{-2} = 2{,}0\ 10^3$ kg m s^{-2}

4. Un élastique long de 40 m et dont la constante de rappel est de 1600 kg s^{-2} est accroché à un pont. Un homme de 80 kg attaché à l'élastique saute du pont.
a. Avec quelle vitesse touche-t-il le sol si l'élastique est accroché à une hauteur de 45 m au-dessus du sol ?
b. A une chute libre de quelle hauteur correspondrait cette vitesse ?
(on néglige la taille de l'homme ; on considère que l'élastique obéit à la loi de Hooke)
(4 points)

La conservation de l'énergie donne :

$mgh = 1/2\ m\ v^2 + 1/2\ k\ x^2$ où $x = (45 - 40)$ m est l'allongement de l'élastique

=> $v^2 = 2\ g\ h - k\ x^2 / m = 2\ .\ 10\ .\ 45 - 1600\ .\ (5{,}0)^2 / 80 = 400\ (m/s)^2$

=> $v = 20$ m/s

3. ceci correspondrait à une chute libre de :

$mgh = 1/2\ m\ v^2 \Rightarrow h = v^2 / 2g = 400 / 20 = 20$ m

5. Dans une écluse, l'eau du compartiment central s'élève à une hauteur de 3,0 m au-dessus de la surface de l'eau du bassin inférieur.

A l'approche d'un bateau venant de l'aval, on amène le niveau de l'eau du compartiment central à celui du bassin inférieur.
A cet effet, on ouvre la vanne d'une canalisation qui débouche à 1,0 m sous le niveau de l'eau du bassin inférieur.
A quelle vitesse l'eau jaillit-elle de la canalisation (au début de l'opération) ?
(On négligera les effets de viscosité et la vitesse avec laquelle le niveau d'eau baisse dans le compartiment central).
(4 points)

Théorème de Bernouilli : $P + 1/2\ \rho\ v^2 + \rho\ g\ y = c^{te}$
On prend y = 0 à la hauteur du débouché de la canalisation (1 m sous le niveau du bassin inférieur). La surface du bassin supérieur est alors à la hauteur H
On note P_{atm} la pression atmosphérique, et P_h la pression exercée, à hauteur du débouché de la canalisation, par la hauteur h (en l'occurrence 1 m) d'eau qui le surplombe (la pression étant isotrope, la direction du tuyau n'a pas d'importance).
En appliquant le théorème de Bernouilli, on peut écrire, pour le bassin supérieur et pour le bassin inférieur :
$P_{atm} + 0 + \rho\ g\ H = (P_{atm} + P_h) + 1/2\ \rho\ v^2 + 0$ (1)
La pression correspondant à une colonne d'eau de hauteur h est ρ g h (en effet, le poids d'une colonne de hauteur h et de base S est ρ g h S, et la pression est le poids divisé par la base S)
(1) -> $P_{atm} + \rho\ g\ H = P_{atm} + \rho\ g\ h + 1/2\ \rho\ v^2$
$v^2 = 2\ g\ (H - h) = 60\ m^2\ s^{-2}$
$v = 7,7\ m / s$

Remarquez que seule compte la différence de hauteur entre les deux bassins – peu importe à quelle profondeur débouche la canalisation.

PHYS-F-104
Examen du 12 janvier 2006

I. Théorie (20 points – 1 heure)

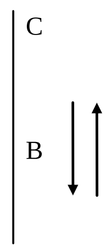
1. Soit un mouvement défini par l'équation $y = A\cos(\omega t + \varphi)$.
Etablissez l'équation différentielle de son mouvement (équation liant y et ses dérivées première et / ou seconde par rapport au temps).
(3 points)

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\frac{dy}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y$$
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

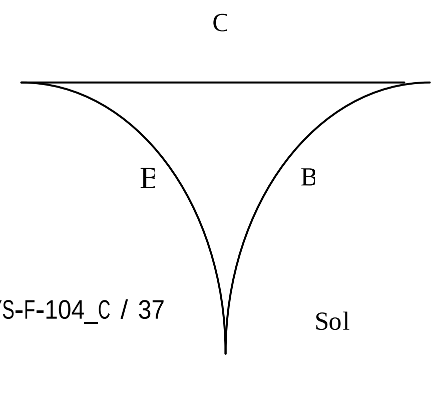
2. Un cycliste qui roule à vitesse constante sur une route horizontale laisse tomber une balle, qui rebondit de manière parfaitement élastique sur le sol.
a. A quelle hauteur la balle va-t-elle revenir ? Justifiez.
b. Décrivez et représentez (en justifiant) la trajectoire du cycliste et celle de la balle dans le plan vertical, telle qu'elles sont vues par un observateur se déplaçant parallèlement au cycliste et à la même vitesse que lui.
c. idem, pour un observateur immobile au bord du chemin.
On néglige tous les frottements.
(3 points)

a. La balle connaît un choc parfaitement élastique avec le sol, son énergie totale est conservée. Son énergie initiale est purement potentielle (pas de vitesse initiale) et correspondant à la hauteur de la chute. Cette énergie potentielle se transforme en énergie cinétique durant la chute, et celle-ci est retransformée en énergie potentielle après le rebond. La balle remonte donc à sa hauteur initiale.

b. Comme l'observateur accompagne le mouvement du cycliste, le cycliste apparaît immobile par rapport à lui.
La balle conserve sa vitesse horizontale, qui est celle du cycliste. Par rapport au cycliste, et donc à l'observateur, elle n'a donc pas de vitesse horizontale.
Son mouvement vertical est uniformément accéléré jusqu'au moment où elle touche le sol, puis il est inversé et uniformément décéléré. Sa vitesse apparaît nulle quand elle revient à la hauteur de la main du cycliste.



c. Pour l'observateur, le cycliste décrit un mouvement horizontal à vitesse constante.



La balle conserve à tout moment sa vitesse horizontale, qui est celle du cycliste ; elle est donc à tout moment située à la verticale du cycliste.
Pour l'observateur, elle décrit lors de sa chute une parabole, sous l'effet de l'accélération de la gravitation et de sa vitesse initiale horizontale.
Après le rebond, elle décrit pour revenir au cycliste la même parabole inversée, avec la même vitesse horizontale et une vitesse initiale égale et de sens opposé à la vitesse avec laquelle elle a atteint le sol.
Quant elle revient à la hauteur de la main du cycliste, la composante verticale de sa vitesse s'annule.

3. a. Quelles sont les dimensions d'un moment d'inertie ?
b. Calculez le moment d'inertie d'un disque homogène de masse *M* et de rayon *R* en rotation autour d'un axe perpendiculaire à sa surface et passant par son centre.
c. Quel est, comparé au précédent, le moment d'inertie d'un deuxième disque, de même diamètre que le premier, fabriqué dans le même matériau, et ayant une épaisseur double ? (justifiez)
d. Quel est, comparé au premier, le moment d'inertie d'un troisième disque, de même épaisseur que le premier, fabriqué dans le même matériau, et ayant un diamètre double ? (justifiez)
(4 points)

a. $I_O = \sum_i r_i^2 m_i$

Les dimensions d'un moment d'inertie sont donc : masse x longueur^2

b. $I_O = \int_0^R r^2\, dm = \rho_S \int_0^R r^2\, 2\pi r\, dr$

où R est le rayon du disque et ρ_S sa masse surfacique : $\rho_S = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$

$$I_O = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \int_0^R r^3\, dr = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

c. L'épaisseur du deuxième disque étant double de celle du premier, la masse est doublée et le moment d'inertie est doublé.
d. La masse du troisième disque est quatre fois la masse du premier ($M = \rho_S\, S = \rho_S\, \pi\, R^2$).
Le moment d'inertie d'un disque étant proportionnel au produit de la masse (x 4) par le carré du diamètre (x 4), le moment d'inertie du troisième disque est 16 fois celui du premier.
(On peut obtenir ceci sans connaître la formule particulière du moment d'inertie d'un disque, en sachant que, en toute généralité, un moment d'inertie est le produit d'une masse par le carré d'un longueur, la masse étant ici multipliée par 4 et la longueur par 2)

4. Supposez un tunnel traversant la Terre de part en part, en passant par son centre. Un objet massif est lâché (sans vitesse initiale) à l'une des extrémités du tunnel.
a. à quelle force l'objet est-il soumis quand il arrive au centre de la terre ? (justifiez)
b. la vitesse de l'objet s'annulera-t-elle quelque part ? où ? (justifiez)
c. où sa vitesse sera-t-elle la plus grande ? (justifiez)
d. où son accélération sera-t-elle la plus grande ? (justifiez)
(La Terre est supposée parfaitement sphérique et homogène ; pas de frottements)
(4 points)

a. Au centre de la Terre, il ne subit aucune force. En effet, la force gravitationnelle est nulle :
- en général, un objet situé à une distance *R* du centre d'un corps massif sphérique (dont le rayon est supérieur à *R*) subit une force gravitationnelle proportionnelle à la masse du corps attracteur située aux distances $r < R$ du centre
- au centre du corps attracteur, l'attraction gravitationnelle est donc nulle
- ce qui se voit encore par le fait que, au centre, les forces gravitationnelles des éléments de matière disposés de part et d'autre du centre se compensent.
b. Comme le corps était initialement au repos au rayon R_T, par conservation de l'énergie il s'arrêtera à l'autre extrémité du tunnel (même énergie potentielle), avant de repartir en sens inverse.
c. Par conservation de l'énergie, l'énergie cinétique et donc la vitesse sont les plus grandes là où l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle, c'est-à-dire au centre de la Terre
d. L'accélération du corps est la plus grande là où la force gravitationnelle qui s'exerce sur lui est la plus grande, c'est-à-dire à la surface de la Terre

5. Sous l'effet d'une force horizontale F, un objet de masse m se déplace à vitesse constante sur une surface horizontale avec laquelle il a des frottements.
a) Quelle force faut-il exercer pour tirer à la même vitesse deux objets identiques attachés l'un derrière l'autre ? justifiez
b) idem, si les deux objets sont posés l'un sur l'autre ? justifiez
c) Quelle force faut-il exercer pour tirer l'objet à une vitesse double ? justifiez
(3 points)

La force F doit être égale à la force de frottement, elle même proportionnelle à la réaction du sol et donc au poids total.
a) Le poids étant doublé, la force nécessaire pour tirer les deux objets est 2 F.
b) idem
c) La force de frottement ne dépend pas de la vitesse. La force nécessaire pour tirer l'objet à une vitesse double est donc F (sinon, il y aurait accélération et la vitesse ne serait pas constante).

6. Enoncez les trois lois de Newton de la mécanique.
(3 points)

1. Tout corps qui n'est pas soumis à l'action de forces extérieures ou dont la résultante de celles-ci est nulle persiste indéfiniment dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.
2.
Une force extérieure $\vec{F}_m$ agissant sur un corps pendant un temps Δt modifie la quantité de mouvement $\vec{p}$ du corps de la quantité $\Delta\vec{p} = \vec{F}_m \, \Delta t$, où la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$

Autre formulation :
Sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$, un corps de masse *m* acquiert une accélération $\vec{a}$ telle que $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}$

3. Deux corps en interaction exercent l'un sur l'autre des forces égales en intensité et de sens opposés $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

II. Exercices (20 points – 1 heure 40 minutes)

1. Une personne a lâché un pétard du haut d'une tour, et l'a entendu exploser 5,00 s plus tard. La vitesse du son étant de 330 m/s et l'accélération de la gravitation g = 9,81 m/s^2, de combien était tombé le pétard avant d'exploser ? (négligez les frottements).
(4 points)

La hauteur h de la chute avant l'explosion est donnée par h = 1/2 g t^2
La même hauteur est parcourue à la vitesse constante v_S par le son : h = v_s . t'
Le temps total écoulé est T = t + t' = 5,00 s

On a donc :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 = v_S \cdot (T - t)$$

$$\frac{1}{2} g t^2 + v_S t - v_S T = 0$$

$$t = \frac{-v_S \pm \sqrt{v_S^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 330T}}{g} = \frac{-330 + \sqrt{330^2 + 32373}}{9{,}81} = 4{,}675\, s$$

$$h = v_S (T - t) = 107\, m$$

2. Une voiture de 1600 kg roulant à 40 km/h entre en collision frontale sur une plaque de verglas avec une autre voiture, de 1200 kg et roulant à 80 km/h. Les deux voitures s'enchevêtrent l'une dans l'autre. Quel est leur mouvement après la collision ?
(4 points)

Prenons pour axe x la direction des deux voitures, avec le sens positif selon celui de la première voiture.
Conservation de l'impulsion après la collision
- pas de composante de l'impulsion de l'amas de tôles transversalement à la direction initiale
- dans la direction du mouvement :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$1600\, kg \cdot 40\, km/h - 1200\, kg \cdot 80\, km/h = 2800\, kg \cdot v$$

$$v = \frac{-32000\, kg\, km/h}{2800\, kg} = -11{,}4\, km/h$$

L'amas de tôles se déplace dans la direction des deux voitures, dans le sens la deuxième voiture, à la vitesse de 11 km/h.

3. Un élastique long de 40m s'allonge de 1,0 mètre lorsqu'une charge de 160 kg y est suspendue.
L'élastique est accroché à un pont. Un homme de 80 kg attaché à l'élastique se laisse tomber du pont.
Quelle est la hauteur minimale à laquelle doit être accroché l'élastique pour que l'homme ne touche pas le sol ?
(on néglige la taille de l'homme et tous les frottements ; on considère que l'élastique obéit à la loi de Hooke)
(4 points)

1. constance de rappel de l'élastique :
   Pour un allongement de 1,0 m, la force de rappel compense le poids de la charge :
   $mg = - kx \Rightarrow k = - mg/x = 160 . 10 / 1,0 = 1600 \text{ kg s}^{-2}$
2. au point le plus bas du saut, l'énergie cinétique est nulle, et toute l'énergie potentielle gravitationnelle initiale (hauteur h = longueur de l'élastique au repos + son allongement x) est transformée en énergie potentielle de rappel du ressort (élongation x).
   $mgh = 1/2\ k\ x^2$
   $\Rightarrow x^2 = 2mgh/k = 2 . 80\text{kg} . 10\text{ms}^{-2} . (40+x)\text{m} / 1600 \text{ kg s}^{-2}$
   $\Rightarrow x^2 - x - 40 = 0$ (x en m)
   $\Rightarrow\ x = 6,8$ m
L'élastique doit être fixé à au moins 46,8 m de hauteur

4. De l'eau s'écoule à la vitesse de 1,0 m/s dans un tuyau d'arrosage de 2,0 cm de diamètre. Elle en sort par un bec dont l'ouverture est de 0,50 cm de diamètre, et qui est dirigé verticalement. Si on néglige les frottements, à quelle hauteur le jet peut-il monter ?
(4 points)

Equation de continuité : $S_1\ v_1 = S_2\ v_2$
La section allant comme le carré du diamètre, la vitesse du jet à la sortie du tuyau est de 16 m/s.
Théorème de Torricelli (dérivé du théorème de Bernouilli) pour les points 1 (sortie du tuyau) et 2 (hauteur maximale du jet)

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

où $P_1 = P_2$ = pression atmosphérique
$v_1 = 16$ m/s $\qquad v_2 = 0$
$y_1 = 0$ (bas du jet)

$\Rightarrow 1/2\ v_1^2 = g\ y_2 \Rightarrow\ \ y_2 = 13$ m

5. Un cylindre de 10 cm de diamètre, de 50 cm de longueur et de masse volumique 5,0 kg/dm^3 est disposé horizontalement et peut tourner librement autour de son axe.
Un objet de 10 kg est accroché à une corde enroulée autour de ce cylindre.
Quelle est l'accélération avec laquelle tombe l'objet sous l'effet de la gravitation ?
On considère que la corde est inextensible ; on néglige sa masse ainsi que tous les frottements.

(4 points)

Forces s'exerçant sur l'objet, selon l'axe z vertical dirigé vers le bas :

$ma = mg - T \qquad (1)$

Moment des forces agissant sur le cylindre, par rapport à l'axe du cylindre :

$\Sigma \vec{\tau}_O = T\,R\,\vec{1}_x = I\,\vec{\alpha} = I\,\dfrac{a}{R}\,\vec{1}_x$ ($\vec{\alpha}$ est dirigée selon la direction $\vec{1}_x$, suivant l'axe du cylindre)

$$\Rightarrow T = I\,\frac{a}{R^2}$$

On porte dans (1) :

$$ma = mg - I\,\frac{a}{R^2}$$

Moment d'inertie d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R : $I = 1/2\ M\ R^2$

$$\Rightarrow ma = mg - \frac{1}{2}\,M\,R^2\,\frac{a}{R^2}$$

$$\Rightarrow a\,(m + \frac{1}{2}\,M) = mg \Rightarrow a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}\,g$$

Masse du cylindre : $M = V\rho = \pi R^2 L\rho = 3{,}14 \cdot (0{,}5)^2 \cdot 5\ dm^3 \cdot 5\ kg/dm^3 = 19{,}63\ kg$

Accélération : $a = \dfrac{10}{10 + \dfrac{19{,}63}{2}}\,g = 0{,}505\ g = 5{,}0\ m/s^2$

PHYS-F-104
Examen du 6 juin 2006
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Définissez :
a. moment d'une force
b. moment d'inertie d'un système de points matériels
c. moment cinétique d'un système de point matériels
(définissez les quantités utilisées)
(6 points)

a. Moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O

$$\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \;=\; r\,F\,\sin\theta(\vec{r},\vec{F})\,\vec{1}_\perp$$

où $\vec{r}$ est le vecteur joignant le point O au point d'application de $\vec{F}$

$\vec{1}_\perp$ perpendiculaire au plan $(\vec{r},\vec{F})$, orienté selon règle du tire-bouchon

b. Moment d'inertie par rapport à un axe de rotation d'un système de points matériels i de masse m_i situés à la distance r_i de l'axe :

$$I_O = \sum_i m_i\, r_i^2$$

$= \int r^2\, dm$ si le système est continu

$= \int r^2 \rho\, dV$ si le système est continu et homogène, de masse volumique ρ

c. Moment cinétique par rapport à un point O d'un système de point matériels i d'impulsion $\vec{p}_i$:

$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ où $\vec{r}_i$ est le vecteur joignant le point O au point i

NB : $\vec{L}_O = I_O\,\vec{\omega}$ dans le cas d'une rotation autour d'un axe qui est aussi un axe de symétrie du corps

2. Démontrez que si un corps sur lequel s'appliquent 3 forces extérieures, situées dans un même plan et non parallèles, est au repos, alors ces forces sont concourantes.
(3 points)

Puisque le corps est au repos, la somme des moments des forces extérieures par rapport à n'importe quel point doit être nulle (loi de la statique).
Considérons le point O défini par l'intersection des droites portant deux des forces. Les moments de ces deux forces par rapport à O est nul.
Le moment de la troisième force par rapport à O doit donc être nul également ; la droite portant cette force doit donc également passer par O.

3. Etablissez la forme de l'énergie potentielle gravitationnelle pour un champ gravitationnel newtonien (variable).
(4 points)

La variation lors du mouvement du point i au point f de l'énergie potentielle correspondant à une force conservative est égale à – le travail de la force.

$$\vec{F}_G = -\frac{GmM}{r^2}\vec{1}_r$$

La force gravitationnelle newtonienne est donnée par

La variation d'énergie potentielle est donc

$$\Delta E_{P,G} = -\int_i^f \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = -\int_i^f (-\frac{GmM}{r^2}\vec{1}_r)\cdot d\vec{r} = \int_i^f \frac{GmM}{r^2}dr = -GmM(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i});$$

$$E_{P,G} = -\frac{GmM}{r} \quad \text{(commode de prendre } E_{P,G}=0 \text{ pour } r=\infty\text{)}$$

4. Supposez que la distance parcourue par un corps dans un certain milieu soit donné, en fonction du temps, par la relation

$$l(t) = \left(at^2 + bt\right)^{1/2} + l_0 \quad \text{où } l_0 \text{ est une constante}$$

a. quelles sont, dans le Système international, les unités de *a, b* et l_0 ?
b. exprimez la vitesse du corps en fonction du temps.
(3 points)

a. les unités de l_0 sont les mêmes que celles de *l*, soit des *m* ;
les unités de (at^2) et de (bt) doivent être des m^2 ; donc celles de *a* sont $m^2\, s^{-2}$ et celles de *b* sont des $m^2\, s^{-1}$
b. on trouve la vitesse en dérivant l'espace parcouru par rapport au temps, soit

$$v(t) = \frac{dl(t)}{dt} = \frac{d\left[\left(at^2+bt\right)^{1/2} + l_0\right]}{dt} = \frac{1}{2}\left(at^2+bt\right)^{-1/2}(2at+b)$$

5. Etablissez l'équation de continuité pour un fluide non visqueux et incompressible. (définissez les quantités utilisées)
(4 points)

Pour un fluide non visqueux et incompressible, les quantités de matière de masse Δm_1 et Δm_2 traversant, en un temps Δt, les surfaces S_1 et S_2 d'un tube de courant doivent être égales :

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

Or $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$ où ρ est la masse volumique constante du fluide et $\Delta V_i = S_i\, \Delta l_i$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad S_1\frac{\Delta l_1}{\Delta t} = S_2\frac{\Delta l_2}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad S_1 v_1 = S_2 v_2$$

II. Exercices (20 points – 1 heure 40 minutes)

1. Quelle est la quantité d'énergie nécessaire pour que le rotor d'une centrifugeuse dont le moment d'inertie est de 4,0 10^{-2} kg m^2 passe de 0 à 10 000 tours / minute ?
(on suppose qu'il n'y a pas de pertes d'énergie par frottements)
(4 points)

$$E = \frac{1}{2} I_0\, \omega^2 \quad \text{où } \omega = 10000 \text{ tours/min } = 2\pi \frac{10000}{60} \text{rad/s}$$

$$\Rightarrow E = 2{,}2\, 10^4 \text{ Joules}$$

2. Une caisse de 200 kg tombe d'un camion qui descend à la vitesse de 72km/h une route inclinée de 10° par rapport à l'horizontale. (on considère que la caisse est tombée du camion sans avoir de vitesse initiale par rapport à celui-ci)
a. Quelle est la condition pour que la caisse s'arrête à cause de son frottement sur le sol ?
b. Si la caisse parcourt une distance de 30 m avant de s'arrêter, quel est le coefficient de frottement entre la caisse et la route ?
(4 points)

La caisse sur le sol subit deux forces :
- la force gravitationnelle
- la force de frottement.

L'accélération de la caisse le long de la route est la somme des composantes tangentielles de ces deux forces.
En prenant l'axe selon la pente de la route, dirigée vers le bas, on a :

$$ma = mg \sin\theta - F_f = mg \sin\theta - \mu_c |F_N| = mg \sin\theta - \mu_c mg \cos\theta = mg \cos\theta\, (\tan\theta - \mu_c) \qquad (1)$$

a. Pour que la caisse s'arrête, il faut que l'accélération soit négative, c'est-à-dire que

$$\mu_c > \tan\theta$$

b. La décélération étant constante, on a :

$$v^2 = v_0^2 + 2as = 0 \Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2s}$$

où v_0 est la vitesse initiale de la caisse, qui est celle du camion ; selon notre convention, s est positif.
On a donc en utilisant (1) :

$$\mu_c = \tan\theta - \frac{a}{g\cos\theta} = \tan\theta + \frac{v_0^2}{2s\, g\cos\theta} = 0.85$$

3. On accroche délicatement un objet de 300 g à l'extrémité d'un ressort qui pend librement. Quand on lâche l'objet, le ressort s'allonge de 30 cm avant de remonter et de se mettre à osciller. Quelle est la fréquence du mouvement d'oscillation ?
(4 points)

Au moment où on lâche la masse, son énergie est purement une énergie potentielle gravitationnelle.
Au point le plus bas de la trajectoire, l'énergie potentielle gravitationnelle est transformée en énergie potentielle de rappel du ressort.

$$mgh = \frac{1}{2} kh^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2mg}{h}$$

Pour un ressort, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{h}} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1.3\ s^{-1}$

4. Un tuyau horizontal de section circulaire de 6,0 cm de diamètre se rétrécit progressivement jusqu'à 4,0 cm. Lorsque l'eau s'écoule dans ce tuyau à une certaine vitesse, la pression manométrique à ces deux sections est respectivement 32 kPa et 24 kPa. Déterminez le débit massique de l'eau dans le tuyau.
(La masse volumique de l'eau est 1000 kg/m^3)
(4 points)

Théorème de Bernouilli ($y_1 = y_2 = 0$) : $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

Equation de continuité : $\mathrm{v}_1\, S_1 = \mathrm{v}_2\, S_2 \quad \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 \frac{S_2}{S_1}$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2\,(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}) \quad \Rightarrow 8\, kPa = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2\,(1 - \frac{0.04^2}{0.06^2}) \quad \Rightarrow \mathrm{v}_2 = 5.37\, m/s \approx 5.4\, m/s$$

Débit massique : $\phi = \rho\, \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho\, \mathrm{v}_2\, S_2 = 6{,}7\, kg/s$

5. Un avion volant à l'horizontale à la vitesse de 1000 km/h à 5000 m d'altitude laisse tomber une bombe de 300 kg.
a. Avec quelle vitesse (exprimée en km/h) la bombe atteint-elle le sol ?
b. Avec quelle vitesse la bombe atteindra-t-elle le sol si l'avion vole à la même vitesse, mais en suivant une trajectoire faisant un angle de 45° avec l'horizontale ? justifiez la réponse.
On néglige les effets des frottements sur la bombe.
NB qu'on demande seulement la *grandeur* de la vitesse.
(4 points)

a. L'énergie initiale (cinétique + potentielle) de la bombe au moment du lâché est transformée totalement en énergie cinétique au moment où elle atteint le sol

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2gh$$

$$v_f = \sqrt{10^6 km^2/h^2 + 2\, g\; 5\, km} \;\text{ où }\; g = 10\frac{m}{s^2} = 10\frac{10^{-3}km}{\left(\frac{1}{3600}h\right)^2} = 10\, 10^{-3}\,(3600)^2\; km/h^2$$

$$v_f = \sqrt{10^6 + 10\,(36)^2\, 10^2}\;\, km/h = 1515\, km/h$$

b. La même vitesse, car l'énergie cinétique initiale ne dépend pas de l'orientation de la trajectoire de l'avion.

PHYS-F-104
Examen du 16 août 2006

I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. La grandeur de la force de frottement *F* entre un solide et un fluide s'exprime par la relation *F* = *K* v, où v est la vitesse relative entre le solide et le fluide.
Le coefficient *K* a-t-il des unités ? Si oui, quelles sont-elles dans le système international ?
(2 points)

Dans le SI, F s'exprime en $kg\ m\ s^{-2}$ et v en $m\ s^{-1}$.
Les unités de $K = F / v$ sont donc $kg\ m\ s^{-2} / m\ s^{-1}$, soit $kg\ s^{-1}$.

2. Connaissant le moment d'inertie d'un solide de masse M autour d'un axe de symétrie D passant par son centre de masse, quel est son moment d'inertie pour la rotation autour d'un axe D' parallèle au premier et situé à la distance *d* de celui-ci ? Démontrez.
(4 points)

Comme l'axe D est un axe de symétrie, il suffit d'étudier le mouvement dans un plan perpendiculaire à D (et donc aussi à D').
On appelle respectivement O et O' les points de percée de ces axes dans ce plan.
Soit $\vec{r}_i$ le vecteur joignant le point O au point où est située la masse m_i

$$I_O = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2}$$

$$I_{O'} = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,'2} \quad \text{où } \vec{r}_i^{\,'} = \vec{r}_i + \overrightarrow{OO'} \Rightarrow \quad \vec{r}_i^{\,'2} = \vec{r}_i^{\,2} + 2\,\vec{r}_i \cdot \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OO'}^{2}\text{, avec } \left|\overrightarrow{OO'}\right| = d$$

$$I_{O'} = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2} + 2\,\overrightarrow{OO'} \cdot \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) + d^2 \left(\sum_i m_i\right)$$

Or $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$ car l'axe est un axe de symétrie

On a donc dans chaque plan perpendiculaire aux axes : $I_{O'} = I_O + d^2 \left(\sum_i m_i\right)$

$$\Rightarrow \quad I_{D'} = I_D + M\,d^2$$

3. Existe-t-il une relation entre la vitesse de propagation d'un son et sa période (ainsi éventuellement que d'autres grandeurs physiques) ? Si non, justifiez. Si oui, donnez cette relation, en définissant les symboles que vous utilisez et en donnant leurs unités dans le système international.
(2 points)

$c = \lambda / T$, où c est la vitesse du son [m / s], λ la longueur d'onde [m] et $T = 1 / \nu$ la période du son [s]

4. a. Définissez ce qu'on entend par « écoulement laminaire » pour un fluide.

b. Formulez l'équation de Bernouilli pour un fluide parfait en écoulement laminaire. Définissez les symboles utilisés et donnez leurs unités dans le Système international.
(4 points)

a. Un écoulement laminaire est caractérisé par le fait que les trajectoires des particules / les lignes de courant ne se coupent pas
b. En chaque point du fluide, on a la relation :

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = c^{te}$$

où P est la pression en ce point [kg m^{-1} s^{-2}], ρ est la masse volumique du fluide [kg m^{-3}], v est la grandeur de la vitesse [m s^{-1}], g est l'accélération gravitationnelle [m s^{-2}], y est la hauteur (par rapport à un certain repère) [m].

5. a. Les satellites en orbite géostationnaire peuvent-ils être positionnés à n'importe quelle latitude ? Justifiez la réponse.
b. Peuvent-ils être positionnés à n'importe quelle altitude ? Justifiez.
(4 points)

a. Non, ils doivent se trouver au-dessus de l'équateur.
En effet, ils doivent rester à la verticale d'un point donné de la surface de la Terre.
Or l'orbite d'un satellite doit décrire un grand cercle autour du centre de la Terre, alors que les points à la surface de la Terre décrivent des petits cercles autour de l'axe de rotation de la Terre.
C'est seulement le long de l'équateur que les petits cercles sont aussi des grands cercles.
b. Non.
La force centripète qui s'exerce sur le satellite est $F_c = m\,\omega^2 R$, où R est la distance au centre de la Terre et ω la vitesse angulaire de la rotation, avec $\omega = 2\,\pi R/T$ et la période T = 1 jour.
Cette force centripète est la force d'attraction gravitationnelle, qui vaut $F_G = G\,M_T\,m / R^2$.
L'égalité de F_c et F_G fixe la valeur de R.

6. Etablissez la formule donnant la période d'oscillation d'un pendule (petites oscillations)
(4 points)

$$F_T = m\,a_T = -m\,g\sin\theta \simeq -m\,g\,\theta \simeq -m\,g\,\frac{l}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{g}{L}\,l = 0$$

$$\Rightarrow \quad l = l_0 \cos\omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{g/L} \qquad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad \text{indép. de } \theta\text{; mesure de g}$$

II. Exercices (20 points – 1 heure 40 minutes)

1. Au port de Bruxelles, un wagon ouvert de 3 000 kg roule à l'horizontale, à une vitesse constante de 5,4 km/h. Il passe sous un tapis roulant, qui le charge de 12 tonnes de sable. Quelle sera sa vitesse lorsqu'il sera chargé ? (on néglige les frottements)
Niveau I

Conservation de la composante horizontale de la quantité de mouvement

$p_i = m_i\ v_i = 3\ 000$ kg . 5,4 km/h

$p_f = m_f\ v_f = 15\ 000$ kg . $v_f = p_i$

$$\Rightarrow v_f = \frac{3\ 000 \text{ kg . } 5{,}4 \text{ km/h}}{15\ 000 \text{ kg}} = 1{,}1 \text{ km/h}$$

2. Une balle de 30 g frappe un bloc de bois de 10 kg, placé sur une surface horizontale et s'y encastre. Sous le choc, le bloc se déplace de 3,0 m. Le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et la surface étant de 0,28, quelle était la vitesse de la balle au moment du choc ?
Niveau II

Frottement : $F_f = \mu_c mg \Rightarrow a_{bloc} = \mu_c g$, sens opposé au mouvement du bloc

Parcours du bloc : $v_f^2(bloc) = v_0^2(bloc) + 2as$ avec s = 3,0 m et a = $-\mu_c g$

$\Rightarrow v_0(bloc) = \sqrt{2\mu_c gs} = 4{,}10$ m/s

Conservation de la quantité de mouvement : $v_{balle} m_{balle} = v_{bloc} m_{bloc}$

$v_{balle} = 4{,}10 \text{ m/s} \cdot 10kg\ / 0{,}03kg = 14\ 10^2$ m/s

3. L'extrémité de chaque pointe d'un diapason qui vibre à une fréquence de 264 Hz se déplace de 1,5 mm de part et d'autre de sa position de repos. Calculez
a) la vitesse maximale
b) l'accélération maximale de l'extrémité de chacune des pointes du diapason.
Niveau II

Il s'agit d'un mouvement d'oscillation harmonique, d'équation

$x = x_0 \cos \omega t$ où $x_0 = x_{\max} = 1{,}5 \text{ mm} = 1{,}5\ 10^{-3}$ m

$v = -x_0 \omega \sin \omega t \Rightarrow v_{\max} = x_0\omega = 1{,}5 \text{ mm} \cdot 2\pi\nu = 2{,}5$ m/s

$a = -x_0\omega^2 \cos \omega t \Rightarrow a_{\max} = x_0\omega^2 = 1{,}5 \text{ mm} \cdot (2\pi\nu)^2 = 4{,}1 10^3$ m/s

4. Une bulle d'air de 5,00 mm de diamètre est émise au fond d'un étang. Arrivée à la surface, son diamètre de 6,50 mm. Quelle est la profondeur de l'étang, sachant que la pression atmosphérique est de 1,013 10^5 Pa ?
(On considère que la masse volumique de l'eau de l'étang est de 1000 kg / m^3 et que la température est uniforme)
Niveau II

Le volume de la bulle est multiplié par $(6{,}50 / 5{,}00)^3 = 2{,}197$

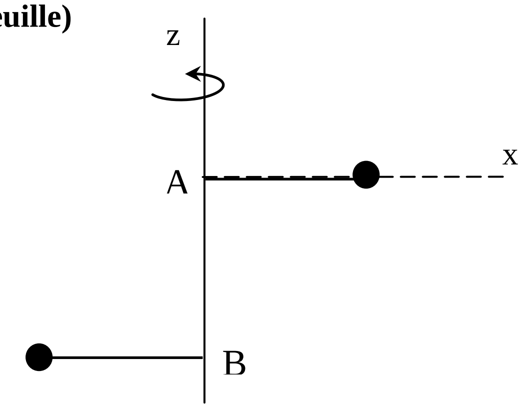
Par la relation *PV = constante* (à température constante), la pression au fond de l'étang est donc 2,197 fois la pression atmosphérique.

La surpression exercée au fond de l'étang par l'eau seule est de 1,197 fois la pression atmosphérique, soit $1{,}213\ 10^5$ *Pa* .

La pression exercée par une hauteur h de liquide est donnée par $P = \rho\, g\, h$, où ρ est la masse volumique et g l'accélération de la pesanteur.

La profondeur est donc $h = P / \rho g = 1{,}213\ 10^5\ Pa\ / 10^3\ kg\ m^{-3}.10ms^{-2} = 12{,}1\ m$

5. Un axe vertical tourne à la vitesse angulaire uniforme de 30 rad/s.
Deux baguettes, longues de 20 cm et de masse négligeable, sont attachées à cet axe, perpendiculairement à lui et à 180° l'une de l'autre ; leurs points de fixation, A et B, sont distants de 40 cm.
Chacun baguette porte à son extrémité une masse de 500g.
Déterminez le moment cinétique du système par rapport au point de fixation de la baguette la plus haute (point A).
Idem par rapport à l'autre point de fixation (point B).
(On prendra l'axe *z* vertical et dirigé vers le haut, l'axe *x* horizontal et dirigé vers la droite, l'axe *y* horizontal et entrant dans la feuille)
Niveau III



Quantité de mouvement de chaque masse :
$\vec{p} = m\,\vec{v} = m\,\omega\,r\ \vec{1}_\perp$ = 0,50 kg 30 rad/s 0,20 m $\vec{1}_\perp$ = 3,0 kg m/s $\vec{1}_\perp$

Appelons masse 1 [2] = celle située à l'extrémité de la baguette fixée en A [B].
Pour 1, la quantité de mouvement selon y est > 0 ; pour 2, elle est < 0

Moment cinétique par rapport au point A :

$$\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = (0{,}20\ \vec{1}_x) \times (3{,}0\ \vec{1}_y) = 0{,}60\ \vec{1}_z\ m^2 s^{-1}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = (-0{,}20\ \vec{1}_x - 0{,}40\ \vec{1}_z) \times (-3{,}0\ \vec{1}_y) = (0{,}60\ \vec{1}_z - 1{,}20\ \vec{1}_x)\ m^2 s^{-1}$$

$$\overrightarrow{L_A} = (-1{,}20\ \vec{1}_x + 1{,}20\ \vec{1}_z)\ m^2 s^{-1}$$

Par rapport au point B, comme par rapport à n'importe quel point de l'axe, le moment cinétique sera le même, car $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{p_1} = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{p_2}$
Les seules données qui importent sont les quantités de mouvement des deux masses et la distance entre elles.

Vérification :
Moment cinétique par rapport au point B :

$$\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = (0{,}20\ \vec{1}_x + 0{,}40\,\vec{1}_z) \times (3{,}0\ \vec{1}_y) = (0{,}60\ \vec{1}_z - 1{,}20\ \vec{1}_x)\ m^2 s^{-1}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = (-0{,}20\ \vec{1}_x) \times (-3{,}0\ \vec{1}_y) = 0{,}60\ \vec{1}_z\ m^2 s^{-1}$$

$$\overrightarrow{L_B} = (-1{,}20\ \vec{1}_x + 1{,}20\ \vec{1}_z)\ m^2 s^{-1}$$

PHYS-F-104
Examen du 12 janvier 2007

I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Une roue tourne librement autour d'un axe vertical, à vitesse angulaire constante. De petits morceaux s'en détachent sous l'effet de la force centrifuge et sont projetés au loin. Comment la vitesse de rotation de la roue est-elle affectée ? Justifiez. (On néglige les frottements)
(3 points)

La vitesse de rotation de la roue n'est pas modifiée.
En effet, l'énergie cinétique totale est conservée.
- avant la rupture, elle est distribuée entre les (futurs) morceaux et le reste de la roue.
- après la rupture, les morceaux gardent la même vitesse (linéaire) donc la même énergie cinétique => le reste de la roue garde la même énergie cinétique => la même vitesse de rotation.

On peut tenir le même raisonnement à partir de la conservation du moment cinétique total, les morceaux emportant la partie du moment cinétique qui était la leur avant la séparation.

2. On considère une masse *m* suspendue à un ressort qui oscille verticalement autour du point *C* avec une amplitude ΔL (le ressort est supposé obéir à la loi de Hooke). Quelles sont les positions où sont respectivement maximales et minimales, en grandeur, la vitesse de la masse m et son accélération ? Justifiez.
(2 points)

La loi d'oscillation est donnée par F = - k x ; énergie potentielle de rappel = 1/2 k x^2.

a) - vitesse maximale au centre d'oscillation C car l'énergie potentielle y est nulle => l'énergie cinétique 1/2 m v^2 y est maximale
 - vitesse minimale (nulle) là où la masse inverse son mouvement => aux extrémités de l'oscillation ($x_C \pm \Delta L$)
b) - accélération maximale là où la force de rappel est maximale – or celle-ci est proportionnelle à l'élongation => accélération maximale pour l'élongation maximale $x_C \pm \Delta L$
 - accélération minimale là où la force de rappel est minimale (nulle), c.-à-d. pour une élongation nulle, c.-à-d. en C

3. Au passage d'une écluse, quand le sas (compartiment central compris entre les deux portes de l'écluse) se remplit d'eau, une péniche peut être attirée violemment vers une des parois. Pourquoi ? Quel est le nom de l'effet responsable de ce mouvement ?
(3 points)

L'eau s'écoule horizontalement, de l'avant vers l'arrière de la péniche.
Devant la péniche, la section qui s'offre à l'eau est S et elle s'écoule à la vitesse v.

A la hauteur de la péniche, l'eau doit s'écouler dans les sections S_1 et S_2 qui s'offrent entre les parois de l'écluse et la péniche. On supposera $S_1 < S_2$ ($< S$).
Par l'équation de continuité, la vitesse de l'eau qui contourne la péniche est $v_1 > v_2$ ($> v$).

Selon l'équation de Bernouilli, on a

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho\, v_2^2 \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho\,(v_2^2 - v_1^2) < 0$$

La différence de pression entre les deux côtés tend à attirer la péniche vers la paroi de l'écluse qui est la plus proche (là où la section est S_1).
Cet effet s'appelle l'effet Venturi.

4. Etablissez la relation entre le rayon *R* de l'orbite et la période *T* de rotation d'une planète autour du Soleil, en supposant les orbites circulaires.
(3 points)

La force centripète du mouvement de rotation est donnée par l'attraction gravitationnelle de Newton :

$$m\,\omega^2\,R = G\frac{m\,M_S}{R^2} \Rightarrow \omega^2\,R^3 = cte$$

Comme $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \rightarrow \dfrac{R^3}{T^2} = cte$

5. Etablissez la relation entre la hauteur d'une note émise par une corde de violon et la tension de la corde.
(3 points)

La hauteur de la note est due à la fréquence de vibration de la corde.
La fréquence ν est reliée à la vitesse v de propagation de l'onde par la relation $v = \lambda\nu$, la longueur d'onde fondamentale étant fixe et donnée par la longueur de la corde.
La vitesse de l'onde dépend à son tour de la tension de la corde par la relation $v = (T / \mu)^{1/2}$, où μ est la masse linéique de la corde.
La fréquence est donc proportionnelle à la racine carrée de la tension.

6. Soient deux référentiels K et K' en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, la vitesse de K' par rapport à K étant $\vec{V}$.
Que deviennent dans le référentiel K' les quantités suivantes ? (justifiez)
a. la distance parcourue par un mobile *M* en un temps Δt
b. sa vitesse vectorielle instantanée
c. son accélération instantanée
d. le travail effectué par une force $\vec{F}$
(6 points)

a) $\Delta\vec{r}\,' = \int_i^f \vec{v}\,'\, dt = \int_i^f (\vec{v}+\vec{V})\, dt = \int_i^f (\vec{v}\, dt + \vec{V}\, dt) = \Delta\vec{r} + \vec{V}\, \Delta t$ (1)

b) $\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{V}$ théorème d'addition des vitesses

c) $\vec{a}\,' = \dfrac{d\vec{v}\,'}{dt} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} + 0 = \vec{a}$ NB. : ceci implique pour la force : $\vec{F}\,' = m\vec{a}\,' = m\vec{a} = \vec{F}$ (2)

d) $\Delta W\,' = \int_{i\to f} \vec{F}\,' \cdot d\vec{r}\,' = \int_{i\to f} \vec{F}\cdot(d\vec{r} + \vec{V}\, dt)$ où on a utilisé (1) et (2)

$$= \Delta W + \left|\vec{V}\right| \int_i^f \vec{F}\cdot \vec{1}_V\, dt$$

II. Exercices (20 points – 1 heure 40 minutes)

1. Un bloc de 20 kg glisse sans frottement sur un plan incliné à 30°, après avoir été lâché sans vitesse initiale depuis une position de départ située à une hauteur de 5,0 m au-dessus de celle du pied du plan incliné. Après un parcours d'un mètre sans frottement sur le plan horizontal situé au pied du plan incliné, le bloc vient percuter un bloc de 10 kg et s'y attache. Les deux blocs glissent alors ensemble et sans frottement sur le plan horizontal. Quelle est leur vitesse à 10 m. du pied du plan incliné ?
(4 points)

La vitesse atteinte par le premier au pied du plan incliné est donnée par la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh = 100\, m^2/s^2 \Rightarrow v = 10\, m/s$$

Lors du mouvement horizontal, il garde cette vitesse uniforme jusqu'au choc avec le second bloc (pas de frottement).
Pour les 2 blocs collés : conservation de l'impulsion :

$$20\,kg\cdot 10\,m/s + 10\,kg\cdot 0\,m/s = (10+20)\,kg\cdot v \Rightarrow v = \frac{200\,kg\,m/s}{30\,kg} = 6{,}7\,m/s$$

Cette vitesse est conservée lors du trajet ultérieur (pas de frottement).

NB On peut trouver la vitesse du second bloc au pied du plan de la manière suivante.
La longueur s qu'il parcourt sur le plan $s = h / \sin\theta$
La composante de l'accélération de la gravitation parallèle au plan est $g \,.\, \sin\theta$
On a donc bien :

$$v^2 = v_0^2 + 2as = 2\cdot g\sin\theta\cdot\frac{h}{\sin\theta} = 2\cdot g\cdot h$$

2. Cinq petites boules identiques de masse *m* et de dimensions négligeables sont placées à des intervalles réguliers sur une tige mince de longueur *L* et de masse *M*, l'une d'entre elles occupant chacune des extrémités.
a) si ce système tourne à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical passant par le centre de la tige, déterminez l'énergie cinétique du système.
b) idem, mais l'axe vertical passe par une des extrémités de la tige (même vitesse angulaire ω).
(4 points)

L'énergie cinétique d'un système en rotation est donnée par $E_c = 1/2\ I_0\ \omega^2$

a) moment d'inertie de la barre par rapport à son centre :

$$2\int_0^{L/2} x^2\ \frac{M}{L}\,dx = 2\frac{M}{L}\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/2} = \frac{1}{12} M\, L^2$$

moments d'inertie des 5 boules, disposées respectivement à des distances –L/2, -L/4, 0, L/4 et L/2 du centre de rotation :

$2\ m\ (L/4)^2 + 2\ m\ (L/2)^2 = 5/8\ m\ L^2$

Energie cinétique du système : $1/2\ (1/12\ M\ L^2 + 5/8\ m\ L^2)\ \omega^2$

b) théorème de Huyghens : $I_D = I_{CM} + M\ d^2$, où I_{CM} est le moment d'inertie d'un système pour une rotation autour d'un axe passant par son centre de gravité (cas a)), et d est la distance entre cet axe et l'axe D qui lui est parallèle.

Moment d'inertie par rapport à l'extrémité de la barre :

$I_D = 1/12\ M\ L^2 + 5/8\ m\ L^2 + (M + 5\ m)\ (L/2)^2$

$\quad = 1/3\ \ M\ L^2 + 15/8\ m\ L^2$

Energie cinétique : $1/2\ (1/3\ M\ L^2 + 15/8\ m\ L^2)\ \omega^2$

On vérifie ce résultat sans faire appel au théorème de Huyghens :

$I_D = 1/3\ M\ L^2 + m\ (0 + (L/4)^2 + (2L/4)^2 + (3L/4)^2 + L^2)$

$\quad = 1/3\ M\ L^2 + 15/8\ m\ L^2$

3. Une pierre blanche plate, d'une masse de 100 g. et se déplaçant à 1,00 m/s, glisse sur une surface verglacée parfaitement lisse, et vient frapper une pierre rouge immobile, de même masse. Après la collision, supposée parfaitement élastique, la direction de la pierre blanche est modifiée de 30°. Quelles sont les composantes des vitesses des deux pierre après la collision ? (on néglige tous les frottements)
(4 points)

Soient x la direction initiale de la pierre blanche et y la direction perpendiculaire.

Conservation de l'impulsion :

$$p_{bx} + p_{rx} = p_{bx}^0 + p_{rx}^0 = p_b^0 \quad \Rightarrow \quad v_{rx} = v_b^0 - v_{bx} \qquad (1) \quad \text{les masses étant égales}$$

$$p_{by} + p_{ry} = p_{by}^0 + p_{ry}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{ry} = -v_{by} \qquad (2)$$

Conservation de l'énergie, qui est purement cinétique :

$$\frac{1}{2}m\,v_b^2+\frac{1}{2}m\,v_r^2=\frac{1}{2}m\,v_b^{(0)2}$$

$$\Rightarrow (v_{bx}^2+v_{by}^2)+\left[(v_b^{(0)}-v_{bx})^2+v_{by}^2\right]=v_b^{(0)2}$$, où on a utilisé (1) et (2)

$$\Rightarrow 2v_{bx}^2+2v_{by}^2-2\,v_b^{(0)}\,v_{bx}=0$$

Or $v_{by}/v_{bx}=\tan\theta=1/\sqrt{3}$

$$\Rightarrow 2\,v_{bx}^2+\frac{2}{3}v_{bx}^2-2\,v_b^{(0)}\,v_{bx}=0$$

$$\Rightarrow 4\,v_{bx}^2-3\,v_{bx}\,.1{,}00\text{ m/s}=0$$

$$\Rightarrow v_{bx}=3/4\text{ m/s}=0{,}75\text{ m/s}$$

$$v_{rx}=1/4\text{ m/s}=0{,}25\text{ m/s}$$

$$v_{by}=v_{bx}\,\tan(30°)=-v_{ry}=\sqrt{3}/4\text{ m/s}=0{,}43\text{ m/s}$$

4. Une planche homogène de 8 kg et de longueur 3,6 m est suspendue par des cordes verticales fixées à chacune de ses extrémités. Un peintre de 60 kg se trouve à 50 cm à gauche du centre de la planche, et un seau de 12 kg à 1,0 m à droite. L'ensemble ne bouge pas. Quelles sont les tensions T_1 et T_2 s'exerçant respectivement dans les cordes de gauche et de droite ?
(4 points)

C'est un problème de statique.
Somme des forces est nulle ; les tensions sont dirigées vers le haut (sens négatif de l'axe z) :
$-T_1+60\,kg\,g+8\,kg\,g+12\,kg\,g-T_2=\;0\Rightarrow T_1+T_2=80\,g\,kg$ (1) où $g=10ms^{-2}$

Somme des moments est nulle ; on les calcule par rapport au centre de la planche :

$$1{,}8m\,T_1-0{,}50m\,.\,60\,kg\,g+0+1{,}0m\,.\,12\,kg\,g-1{,}8m\,T_2=0\Rightarrow 1{,}8m\,(T_1-T_2)=18\,g\,m.kg$$

$$\Rightarrow (T_1-T_2)=10\,g\,kg \qquad (2)$$

(1) + (2) $\rightarrow$ $2T_1=90\,g\,kg=900\,N\Rightarrow T_1=450\,N$
Dans (2) $\rightarrow$ $T_2=350\,N$

5. Deux cordes fabriquées dans la même matière sont attachées l'une à l'autre ; la deuxième a un diamètre double de celui de la première.
L'extrémité libre de la première corde est soumise à un mouvement d'oscillation transverse dont la période est de 1,0 s. L'onde qui se forme dans cette corde a une longueur de 1,0 m. Quelle est la longueur de l'onde qui se forme dans la deuxième corde?
(4 points)

Vitesse de l'onde dans la première corde :

$$v_1 = \lambda_1 \nu_1 = \lambda_1 / T_1 = 1 \text{ m/s} = \sqrt{F_{T1} / \mu_1}$$

où F_{T1} est la tension dans la première corde et μ_1 est sa masse linéique.

La tension F_{T2} dans la deuxième corde = F_{T1}, sinon les cordes se déplaceraient globalement. La masse linéique de la deuxième corde $\mu_2 = 4\,\mu_1$ puisque son rayon est double de celui de la première..
Dans la deuxième corde, on a donc

$$v_2 = \lambda_2 \nu_2 = \sqrt{F_{T2} / \mu_2} = \sqrt{F_{T1} / 4\mu_1} = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \lambda_1 \nu_1$$

Comme les deux cordes oscillent à la même fréquence, qui est celle de l'oscillation du nœud qui les relie :

$$\nu_2 = \nu_1 \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2} \lambda_1 = 0{,}50m$$

PHYS-F-104
Physique
Examen du 31 mai 2007
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Considérez les grandeurs

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{v}(t)\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{d}{dt}\vec{v}(t)\right|$$

où v est une vitesse et t un temps

a. Ces grandeurs sont-elles scalaires ou vectorielles ?
Quelles sont leurs unités dans le SI ?
b. En général, ces grandeurs sont-elles égales ? Pourquoi ?
c. Quand ces grandeurs sont-elles égales ?
d. Dans quel type de mouvement la première de ces grandeurs est-elle nulle ?
e. Si la première grandeur est nulle, la seconde l'est-elle également ? Expliquez
f. Dans quel type de mouvement la deuxième de ces grandeurs est-elle nulle ?
(6 points)

a. Ce sont des grandeurs scalaires, car elles sont la norme de vecteurs. Leurs unités sont m s^{-2}
b. Non, car pour un mouvement quelconque la deuxième grandeur, outre le changement de module de la vitesse (première grandeur), fait aussi intervenir le changement de direction de la vitesse. (En outre, même pour un mouvement rectiligne, la première peut être négative et la seconde est toujours positive).
c. Quand le mouvement est rectiligne (et il faut en outre que la vitesse scalaire croisse ou soit constante)
d. Pour un mouvement uniforme, c'est-à-dire se déroulant à vitesse scalaire constante.
e. La deuxième n'est pas nécessairement nulle – exemple mouvement circulaire uniforme
f. Pour un mouvement rectiligne uniforme.

2. Etablissez la forme de l'énergie potentielle gravitationnelle pour un champ gravitationnel constant (donnez la formule et justifiez).
(4 points)

La variation lors du mouvement, du point *i* au point *f*, de l'énergie potentielle correspondant à une force conservative est égale à – le travail de la force.
Choisissant l'axe z vertical dirigé vers le haut, la force gravitationnelle est $-mg$

$$\Delta U = -\int_i^f (-mg)\,dz = mg\,\Delta z \quad \text{ou encore} \quad U = mgz + C$$

3. La pression de l'air à l'intérieur d'une bulle de savon est-elle plus grande, égale, ou plus petite que la pression à l'extérieur ? Pourquoi ?
(3 points)

La pression intérieure est plus grande, car elle doit compenser non seulement la pression extérieure, mais aussi les forces de tension de surface, qui tendent à comprimer la bulle.

4.
a. Définissez le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe de rotation ; définissez les symboles que vous utilisez.
b. Calculez le moment d'inertie d'une tige homogène de masse *M* et de longueur *L* pivotant autour de l'une de ses extrémités.
(4 points)

a. Moment d'inertie I_O pour la rotation d'un solide autour d'un axe passant O :

$I_O = \sum_i m_i\, r_i^2$ où r_i est la distance entre la masse m_i et l'axe O,
la somme portant sur tous les éléments de masse du corps

ou

$I_O = \int_V r^2\, dm = \int_V r^2 \rho\, dV$ si la densité $\rho = \dfrac{M}{V}$ est constante, M étant la masse de l'objet et V son volume

b. $I_O = \int_0^L r^2\, dm$ où $dm = \rho\, dx = \dfrac{M}{L}\, dx$; ici, à une seule dimension, $r = x$

$$= \int_0^L x^2 \frac{M}{L}\, dx = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\, dx = \frac{1}{3}\frac{M}{L}\, x^3\Big]_0^L = \frac{1}{3} M L^2$$

5. Enoncez les trois lois de la mécanique de Newton
(3 points)

1. Tout corps qui n'est pas soumis à l'action de forces extérieures persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme (loi de l'inertie)

2. Une force extérieure $\vec{F}_m$ agissant sur un corps pendant un temps Δt modifie la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ du corps de la quantité $\Delta\vec{p} = \vec{F}_m\,\Delta t$

3. Deux corps en interaction exercent l'un sur l'autre des forces égales en intensité et de sens opposés (loi de l'action - réaction)

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Une pierre de 100 g est tenue attachée au bout d'un bâton long de 50 cm, et tourne d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan vertical à raison de 2,5 tours par seconde. Le centre de sa trajectoire est situé à 1,20 m du sol.
La pierre est lâchée quand le bâton est à l'horizontale, en venant du bas.
A quelle hauteur par rapport au sol monte la pierre ?
(On néglige tous les frottements)
(4 points)

Quand le bâton est horizontal, la vitesse, qui est tangente à la trajectoire, est dirigée verticalement vers le haut.
La vitesse instantanée de la pierre au moment où elle est lâchée est
$v = \omega\, r = 2\,\pi\,\nu\, r = 2\,\pi\ 2{,}5\ s^{-1}\ 0.5\ m = 7{,}85\ m / s$
Conservation de l'énergie : l'énergie cinétique de la pierre au moment où elle est lâchée est entièrement transformée en changement de son énergie potentielle (au point le plus haut de la trajectoire, par définition la vitesse de la pierre est nulle => son énergie cinétique est nulle)
=> $1/2\ m\, v^2 = m\, g\, \Delta h$ => $\Delta h = v^2 / 2g = 3{,}081\ m$
=> hauteur par rapport au sol = 3,081 m + 1,20 m = 4,3 m
(deux chiffres significatifs)

2. Une sphère homogène, dont la masse est de 500 g et le diamètre 100 mm, lâchée au repos, roule sur un plan long de 1000 mm, incliné de 30 ° par rapport à l'horizontale.
Quelle est la vitesse de son centre de gravité au bas du plan incliné ?
(4 points)

Conservation de l'énergie potentielle + énergie cinétique
Ici : énergie cinétique totale au départ = 0
énergie potentielle en bas du plan incliné = 0 (choix de référence)

=> $mgh = 1/2\ I\ \omega^2 + 1/2\ m\ v^2$,
(énergie cinétique totale au bas du plan incliné = énergie cinétique de rotation + énergie cinétique de translation du centre de gravité)
où
h = différence de hauteur entre point initial et final = $L \sin \theta$,
avec L = longueur du plan incliné = 1000 mm
θ son inclinaison = 30 °
I = moment d'inertie de la sphère
ω = sa vitesse angulaire au bas du plan incliné
v = vitesse de son centre de gravité au bas du plan incliné.

La vitesse scalaire v du centre de gravité = vitesse linéaire (scalaire) de chaque point de la circonférence => $v = \omega\ r$ => $\omega = v / r$
Pour une sphère, $I = 2/5\ m\ r^2$ (v. cours)

=> $mgh = 1/2\ 2/5\ m\ r^2\ v^2 / r^2 + 1/2\ m\ v^2$
$g\ L \sin 30° = 1/5\ v^2 + 1/2\ v^2$

$10 \text{ m s}^{-2} . 1{,}000 \text{ m} . 1/2 = 7/10 \, v^2$
$v^2 = 10/7 \; 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
$v = 2{,}7 \text{ m s}^{-1}$
(2 chiffres significatifs, comme sur l'inclinaison du plan)

Remarquez que ce résultat est indépendant de la masse et du rayon de la sphère

3. Un véhicule de 8000 kg roulant à 5,4 km/h cogne un autre véhicule, qui est immobile. Ils se déplacent alors ensemble à l'horizontale, à la vitesse de 3,6 km/h (on néglige les frottements)
a) Quelle est la masse du deuxième véhicule? Avec quelle précision connaît-on cette masse ? (justifiez)
b) Le choc entre les deux véhicules est-il un choc élastique ? Pourquoi ? Que s'est-il passé ?
(4 points)

a) Quantité de mouvement avant le choc = quantité de mouvement du premier véhicule + quantité de mouvement du deuxième véhicule =

$m_1 \, v_1 + m_2 \, v_2 = 8000 \text{ kg} . 5{,}4 \text{ km/h} + m_2 . 0 \quad \text{kg km/h} \qquad (1)$

Quantité de mouvement après le choc :

$(m_1 + m_2) \, v = (8000 + m_2) . 3{,}6 \quad \text{kg km/h} \qquad (2)$

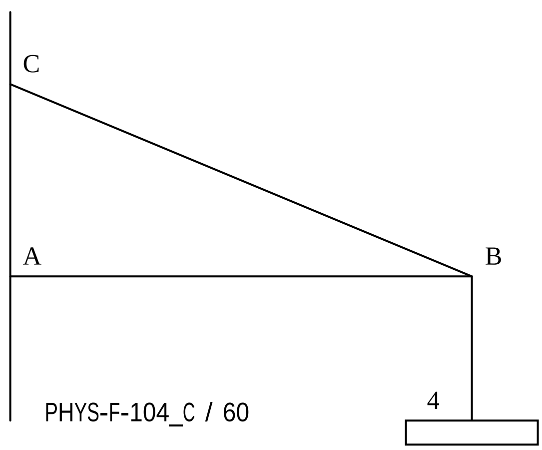
Conservation de la quantité de mouvement: (1) = (2)

$8000. \; 5{,}4 \text{ kg km/h} = (8000 + m_2) . 3{,}6 \quad \text{kg km/h}$
$m_2 = 8000 \, (5{,}4 - 3{,}6) / 3{,}6 \text{ kg} = 4000 \text{ kg}$

On connaît la masse du deuxième véhicule avec deux chiffres significatifs, c'est-à-dire à 100 kg près.

b) Si le choc était élastique, on aurait par définition conservation de l'énergie cinétique.
Ce n'est pas le cas ici :
énergie cinétique initiale :
$1/2 \; m_1 \, v_1^2 = 116{,}64 \; 10^3 \text{ kg km}^2 \text{ h}^{-2}$
énergie cinétique après la collision dans le cas a)
$1/2 \; (m_1 + m_2) \, v^2 = 77{,}76 \; 10^3 \text{ kg km}^2 \text{ h}^{-2}$
Une partie de l'énergie cinétique a été transformée en chaleur et en déformations plastique des tôles, le choc étant inélastique.

4. Une enseigne dont la masse est de 10 kg est attachée en l'extrémité B d'une barre horizontale AB, longue de 1,0 m et dont la masse est de 3,0 kg.
L'extrémité A de la barre AB est appuyée contre un mur vertical lisse (pas de frottement).
L'extrémité B de la barre AB est articulée à une barre CB, dont on néglige la masse, qui est attachée au mur et qui fait un angle de 30° avec la barre AB.
Représentez toutes les forces s'exerçant sur les deux barres et calculez leur grandeur, de façon à ce que le système soit en équilibre. Justifiez.



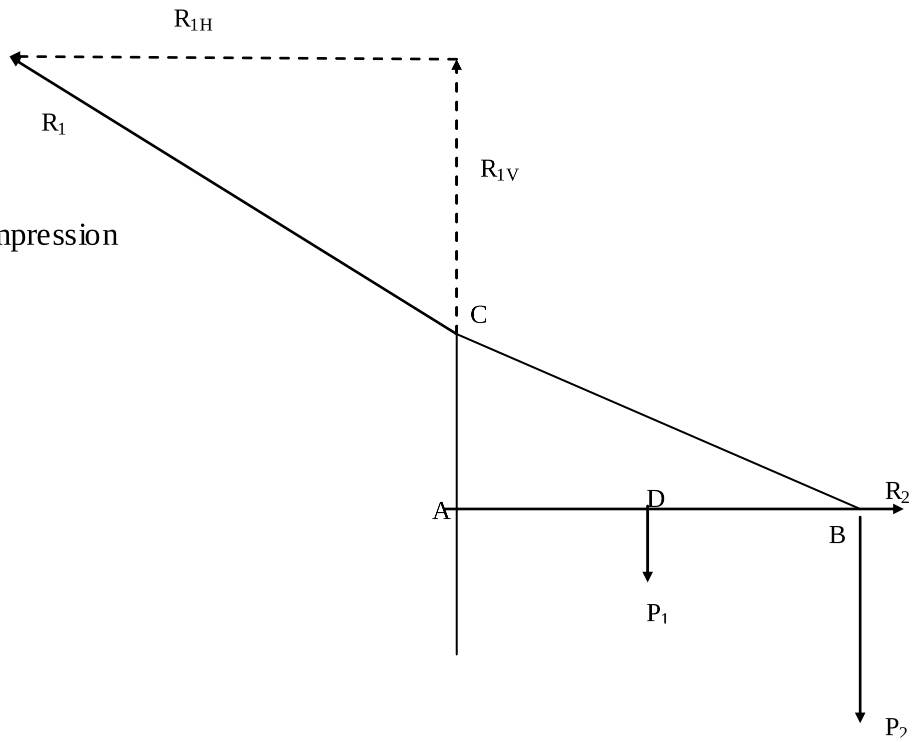
Les barres AB et CB sont-elles en traction, en compression, ou ni l'un ni l'autre ? (4 points)

En D, milieu de la barre AB, s'applique son poids $\mathbf{P_1 = 30\ N}$, dirigé verticalement vers le bas (on prend le sens positif de l'axe vertical vers le bas).
En B s'applique le poids $\mathbf{P_2 = 100\ N}$ de l'enseigne, dirigé verticalement vers le bas.
Le système ABC étant à l'équilibre, la somme de toutes les composantes verticales de toutes les forces doit être nulle.
En A s'exerce la réaction R_2 du mur. Comme la barre AB est horizontale et appuie sur le mur sans frottement, la réaction R_2 n'a qu'une composante horizontale (on prend le sens positif de l'axe horizontal vers la droite).
Les poids P_1 et P_2 doivent donc être compensés par la composante verticale de la réaction R_1 du mur au point d'accrochage C :

$\mathbf{R_{1V}} = - P_1 - P_2 = \mathbf{-130\ N}$, dirigée vers le haut

Le système ABC étant à l'équilibre, la somme des moments, par rapport à n'importe quel point, de toutes les forces s'appliquant sur lui doit être nulle.
Calculons la projection sur l'axe perpendiculaire à la feuille de la somme des moments par rapport au point A :

$0 = AD\ .\ P_1\ .\ \sin 90° + AB\ .\ P_2 \sin 90° - AC\ .\ R_1\ .\ \sin (AC, R_1)$
$= 0{,}5\ .\ 30\ \mathrm{Nm} + 1\ .\ 100\ \mathrm{Nm} - (1\mathrm{m}\ .\ \mathrm{tg}\ 30°)\ .\ |R_{1H}|$ car $R_1.\sin(AC, R_1) = R_{1H}$
$= 115\ \mathrm{Nm} - \mathrm{tg}\ 30°\ .\ |R_{1H}|\ \mathrm{m}$
$\Rightarrow \mathbf{R_{1H}} = - 115 / \mathrm{tg}\ 30°\ \mathrm{N} = \mathbf{-199{,}2\ N}$
$\Rightarrow \mathbf{R_1} = (R_{1V}^2 + R_{1H}^2)^{1/2} = 237{,}9\ \mathrm{N} = \mathbf{24\ 10^1\ N}$ (2 chiffres significatifs)
$\mathbf{R_2} = - R_{1H} = \mathbf{199{,}2\ N}$



CB est en traction, AB est en compression

5. Une personne placée à 10 m d'un haut-parleur de fancy-fair perçoit une puissance sonore de 110 dB.
a) Si un second haut-parleur, de même puissance, est placé à côté du premier, quelle est la puissance sonore totale (exprimée en décibels) perçue par la personne ?
b) Si le second haut-parleur est placé 20 mètres derrière le premier, quelle est la puissance sonore totale perçue par la personne ?
(4 points)

a) $I_{tot} = 2\ I_1$
Par définition, le niveau sonore, exprimé en dB, est $\beta = 10 \log_{10} (I / I_0)$, où I_0 est une certaine intensité de référence.
=> variation de puissance sonore, exprimée en décibels :
$\Delta\beta = 10 \log (I_{tot} / I_1) = 10 \log (2) = 10 \,.\, 0{,}30 = 3$ dB
=> puissance sonore perçue = 113 dB

b) Le haut-parleur 1 est placé à 10 m de la personne, le haut-parleur 2 à 30m.
Comme l'intensité du son est inversement proportionnelle au carré de la distance, l'intensité du son émis par le haut-parleur 2 et perçu par la personne est 1/9 de l'intensité du son émis par le haut-parleur 1.
$I_{tot} = 10/9\ I_1$
=> variation de puissance sonore, exprimée en décibels :
$\Delta\beta = 10 \log (I_{tot} / I_1) = 10 \log (10/9) = 10 \log 10 - 10 \log 9 = 10 - 9{,}54 = 0{,}5$ dB
=> puissance sonore perçue = 110,5 dB

PHYS-F-104
Physique
Examen du 17 août 2007
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Soient deux cylindres de mêmes poids, de mêmes dimensions et que rien ne distingue extérieurement. Ils diffèrent cependant par les matériaux qui les composent et par leur structure : l'un est plein, et l'autre est creux.
Comment peut-on déterminer simplement, sans les déformer et sans analyser l'intérieur (rayons X, ultrasons, etc.), quel est le cylindre plein ?
(3 points)

En les laisseant rouler sur un plan incliné.
Le moment d'inertie du cylindre creux est le plus grand, puisque la matière est concentrée à plus grande distance de l'axe.
Sa vitesse de roulement sur le plan incliné est donc la plus petite.
En effet, par conservation de l'énergie, on a pour chacun des deux cylindres :
$mgh = 1/2\ I\ \omega^2 + 1/2\ m\ v^2$, où ω est la vitesse angulaire de rotation et $v = \omega r$ la vitesse du centre de gravité
=> ω et v sont les plus petits pour le cylindre dont I est le plus grand, à savoir le cylindre creux.

2. Pour une vitesse donnée à la sortie du canon, sous quel angle faut-il lancer un obus pour que la portée soit maximale (on néglige les frottements) ? Démontrez.
(4 points)

On prend
- l'axe x horizontal, dans la direction du tir, l'axe z vers le haut
- $x = z = 0$ pour le canon
- $v_{0z} = v_0 \sin\theta$, où v_0 est la vitesse scalaire de l'obus à la sortie du canon
- g accélération de la pesanteur.

Temps de montée : mouvement uniformément accéléré selon z :
$v_z = -g\ t_m + v_{0z} = 0$ au sommet de la trajectoire => $t_m = v_0 \sin\theta / g$
Durée du mouvement : $t = 2\ t_m$ car temps de montée = temps de descente
Portée : mouvement rectiligne uniforme selon x :
$x_P = v_{0x}\ t = v_0 \cos\theta\ .\ 2\ v_0 \sin\theta / g = 2\ v_0^2 \sin\theta \cos\theta / g$
Angle donnant la portée maximum :
$dx_P / d\theta = 0 \Rightarrow d(\sin\theta \cos\theta) / d\theta = 0 \Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$

3. Un objet sphérique arrivant à proximité de la surface d'une étoile à neutrons se déforme. Expliquez pourquoi.
(2 points)

L'objet s'allonge, et éventuellement se fragmente, à cause de la grande différence d'attraction gravitationnelle entre les parties de l'objet les plus proches de l'étoile (dont le champ gravitationnel est très intense) et les parties plus éloignées.
C'est un effet « de marée ».

4. Etablissez (« démontrez ») la forme de l'énergie potentielle de rappel d'un ressort obéissant à la loi de Hooke.
(4 points)

Loi de Hooke : F = - k x
Définition de l'énergie potentielle : $U = - \int F\,dx = 1/2\ k\ x^2$

5. Si V est une grandeur physique vectorielle et S une grandeur physique scalaire
  a. peut-on additionner V et S ? Si oui quelles sont les unités de la somme ?
  b. peut-on multiplier V par S ? Si oui quelles sont les unités du produit ?
(2 points)

a. Non, on ne peut additionner V et S, car il s'agit de grandeurs de natures différentes.
b. Oui, la multiplication par un scalaire d'un vecteur est un vecteur, dont les unités sont le produit des unités de V et S.

6. Définissez (au moyen de formules impliquant d'autres grandeurs physiques)
- moment cinétique d'un point matériel
- moment d'inertie d'un système
- module de Young
(3 points)

- moment cinétique d'un point matériel

$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$ où $\vec{r}$ est la distance du point matériel au point O et $\vec{p}$ sa quantité de mouvement

- moment d'inertie d'un système

Le moment d'inertie d'un système défini par rapport à un axe de rotation :

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2\,dm$$

où r_i est distance entre chaque constituant du système, de masse m_i, et l'axe de rotation

- module de Young

$$E = \sigma / \varepsilon = \frac{F}{S} \frac{1}{\Delta L / L_0}$$

7. Exprimez la vitesse de propagation d'une onde en fonction de sa fréquence, et éventuellement d'autres grandeurs physiques.
(2 points)

$v = \lambda\,\nu$, où λ est la longueur d'onde et ν la fréquence de l'onde

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Un wagon-citerne pesant 4 tonnes est rempli de 30 m^3 d'eau. Il est lancé à la vitesse de 6 km/h sur une voie de chemin de fer horizontale. On ouvre une vanne située sous le wagon, et l'eau s'écoule à raison de 10 litres par seconde. Quelle est la vitesse du wagon après 1 minute ?
On néglige tous les effets de frottement.
(4 points)

A chaque instant, la composante horizontale de la quantité de mouvement totale wagon + eau reste constante.
Par inertie, la partie de l'eau qui s'échappe conserve la quantité de mouvement horizontale qu'elle avait dans le wagon.
Par conséquent, le wagon et l'eau qu'il contient conservent aussi exactement leur quantité de mouvement, et donc leur vitesse.
La vitesse du wagon reste donc constante, soit 6 km/h.

2. Une pierre d'une masse de 100 g est attachée au bout d'une ficelle longue de 1,00 m., qui oscille autour d'un point fixe avec une amplitude angulaire de 0,100 rad.
a) exprimez cette amplitude angulaire en degrés
b) quelle est la vitesse maximale de la pierre ?
(4 points)

a) 0,100 rad. = 0,100 . 360° / 2π = 5,73°

b) conservation de l'énergie :
énergie cinétique au point le plus bas, où la vitesse est maximale = énergie potentielle au point le plus haut

$$\tfrac{1}{2} m v_{\max}^2 = m g h_{\max} \Rightarrow v_{\max}^2 = 2 g h_{\max}$$

Le point le plus haut est donné par $h_{\max} = L - L\cos\theta_{\max}$

$$\Rightarrow v_{\max}^2 = 2 g h_{\max} = 2 g L\,(1-\cos\theta_{\max}) = 0{,}10\ \mathrm{m^2 s^{-2}} \qquad v_{\max} = 0{,}32\ \mathrm{m/s}$$

3. Dans l'aorte, dont le rayon est de 1 cm, le sang circule à une vitesse de 30 cm/s. Il se répartit ensuite entre 4 milliards de capillaires, dont le diamètre moyen est de 8 μm. Quelle est la vitesse du sang dans les capillaires et quelle y est la pression comparée à celle dans l'aorte, à la même hauteur dans le corps ?
(On néglige les effets de viscosité ; on prend pour le sang la masse volumique de l'eau)
(4 points)

Equation de continuité : $S_a\ v_a = S_c\ v_c \Rightarrow v_c = S_a\ v_a / S_c$
$S_a = \pi\ 10^{-4}\ m^2$
$S_c = 4\ 10^9\ \pi\ (4\ 10^{-6})^2\ m^2$
$v_c = (\pi\ 10^{-4}\ m^2\ 0{,}30\ m/s) / (4\ 10^9\ \pi\ 16\ 10^{-12})\ m^2 = 0{,}5\ mm/s$

Equation de Bernouilli : $p + 1/2\ \rho\ v^2 + \rho\ g\ y = cte$
$p_a + 1/2\ \rho\ v_a^2 = p_c + 1/2\ \rho\ v_c^2$ (car $y_a = y_c$)
$p_c - p_a = 1/2\ \rho\ v_a^2 = 1/2\ 1\ g/cm^3\ 900\ cm^2\ s^{-2} = 450\ 10^{-3}\ kg\ 10^2\ m^{-1}\ s^{-2} = 45\ Pa$

4. Un plan incliné formant un angle de 30° avec l'horizontale est long de 200 cm. Un bloc d'une masse 100g, lâché sans vitesse initiale depuis l'extrémité haute du plan, glisse sur celui-ci, le coefficient de frottement cinétique étant de 0,200.
Arrivé au pied du plan, le bloc heurte de manière parfaitement élastique un bloc de même masse, au repos. Quelle est la vitesse acquise par ce dernier ?
(4 points)

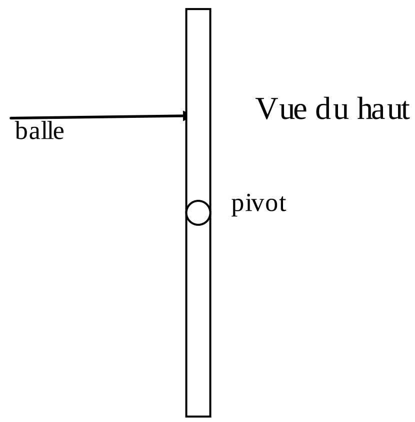
Vitesse du bloc au pied du plan :
$v^2 = v_0^2 + 2\ a\ s$ où a est l'accélération du bloc, v_0 = vitesse initiale = 0, s = parcours = 2m

Accélération du bloc :
- composante vers le bas (sens positif), due à la gravitation :
  $g.\ \sin(30°)$
- composante vers le haut, due au frottement :
  $-\ \mu_c\ F_N\ /\ m = -\ \mu_c\ m\ g \cos(30°)\ /\ m = -\ \mu_c\ g \cos(30°)$

$\Rightarrow a = g\ [\ \sin(30°) - \mu_c \cos(30°)\ ] = 3{,}27\ ms^{-2}$
$\Rightarrow v^2 = 2\ .\ 2m\ .\ 4{,}83\ ms^{-2} = 19{,}3\ m^2\ s^{-2} \Rightarrow v = 3{,}6\ m/s$

Comme le choc est élastique et que les deux blocs sont de même masse, toute la quantité de mouvement du bloc descendant le plan incliné est transférée à l'autre, qui acquiert donc la vitesse de 3,6 m/s.

5. Une latte en bois, longue de 1,00 m et d'une masse de 300g, initialement au repos, peut tourner sans frottement dans le plan horizontal, autour d'un pivot vertical placé en son centre.
Une balle de fusil de 4,0 g, tirée à l'horizontale perpendiculairement à la latte avec une vitesse de 250 m/s, vient frapper la latte a mi-distance entre le pivot et l'une des extrémités, et en ressort à la vitesse de 150 m/s.
Quelle est la vitesse de rotation de la latte après l'impact ?
(on néglige les dégâts provoqués par la balle à la latte).
(4 points)



Moment de la quantité de mouvement par rapport au pivot, cédé par la balle et acquis par la latte :
$\Delta L_O = r\ .\ \Delta p = 0{,}25\ m\ .\ 4{,}0\ 10^{-3}\ kg\ .\ (250 - 150)\ m\ s^{-1} = 0{,}10\ kg\ m^2\ s^{-1}$

I_O = moment d'inertie de la latte $= 1/12\ M\ L^2 = 1/12\ .\ 0{,}3\ kg\ .\ 1\ m^2 = 1/40\ kg\ m^2$

Conservation du moment cinétique : $\Delta L_O = I_O\ \Delta\omega$
$\Delta\omega = 0{,}10\ kg\ m^2\ s^{-1}\ /\ 1/40\ kg\ m^2 = 4\ rad\ s^{-1} = 4{,}0\ /\ 2\pi$ tours / s = 0,64 tours / s

PHYS-F-104
Physique
Examen du 10 janvier 2008

I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Quelles sont les unités des quantités suivantes, formulées en termes des unités de base du Système International (ne pas utiliser les noms d'unités dérivées) ?
a) la pression
b) le moment cinétique
c) le moment d'inertie
d) l'accélération centripète
e) le travail d'une force
f) le potentiel (pour une force conservative)
(6 points)

a) kg m^{-1} s^{-2} force / surface
b) kg m^2 s^{-1} moment de la quantité de mouvement
c) kg m^2 Σ m r^2
d) m s^{-2} accélération
e) kg m^2 s^{-2} force . distance
f) kg m^2 s^{-2} c'est un travail ; F = -dU/dx

2. Une force électrique attractive est exercée sur une particule de charge *q* par une particule de charge opposée *–q*. Cette force est proportionnelle au carré de la charge *q*, elle est inversement proportionnelle au carré de la distance *r* entre les particules, et elle est dirigée selon l'axe qui les joint.
Formulez mathématiquement cette force, en définissant les quantités que vous utilisez.
(3 points)

La force exercée sur la particule de charge *q* est donnée par la relation

$$\vec{F} = -K\frac{q^2}{r^2}\vec{1}_r$$

où le vecteur $\vec{1}_r$ est dirigé selon l'axe joignant les particules et orienté vers la particule de charge *q*.

3. Enoncez les lois de la statique. Si vous donnez une formulation mathématique, définissez les symboles que vous utilisez.
(4 points)

1. La somme vectorielle des forces extérieures $\vec{F}_{ext}$ agissant sur le système doit être nulle

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

2. La somme vectorielle des moments $\vec{\tau}_O$ des forces extérieures agissant sur le système, par rapport à tout point O, doit être nulle

$$\sum \vec{\tau}_O(\vec{F}_{ext}) = 0$$

4. Etablissez l'équation différentielle caractérisant le mouvement d'un ressort obéissant à la loi de Hooke, qui est plongé dans un fluide exerçant une force de frottement proportionnelle à la vitesse.
Donnez la forme générale de la solution, et décrivez les caractéristiques qualitatives de cette solution (pas nécessaire de faire les calculs pour justifier la forme de la solution).
(3 points)

$$ma = -kx - bv \qquad \Leftrightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Solution $\quad x = A e^{-\alpha t} \cos \omega' t$

La solution générale est oscillatoire, avec un terme d'amortissement exponentiel.

5. Les galaxies, qui comportent typiquement de l'ordre de 10^{11} étoiles, sont en rotation autour de leur centre.
a) Dans la physique newtonienne, comment la vitesse angulaire des étoiles en rotation (sur des orbites approximativement circulaires) autour du centre d'une galaxie dépend-elle de leur distance R par rapport au centre de la galaxie et de la masse M de matière comprise à une distance du centre inférieure à R ? Justifiez.
b) Dans les galaxies « spirales », dont la densité de matière visible (étoiles et gaz) diminue rapidement quand on s'écarte du centre de la galaxie (elles comportent des « bras » en rotation autour du centre de la galaxie), on observe que la vitesse angulaire des étoiles est approximativement constante jusqu'à de grandes distances du centre de la galaxie.
Compte tenu du résultat de a), qu'est-ce que cette observation indique concernant la manière dont la matière composant de la galaxie varie avec la distance au centre de la galaxie ?
c) Que peut-on conclure de tout ceci ?
(4 points)

a) L'accélération centripète est donnée par la loi de Newton, où m est la masse d'une étoile en rotation à une distance R du centre et G la constante de Newton : on a vu au cours que les effets gravitationnels sont les mêmes que si toute la masse comprise dans une sphère de rayon R était concentrée au centre =>

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \omega^2 = G\frac{M}{R^3}$$

b) Si on observe que ω^2 = constante, il faut que M augmente comme R^3.
c) Dès lors, soit la physique newtonienne ne s'applique pas dans le cas des grands objets comme les galaxies, soit il y a dans les galaxies, outre la matière visible, une matière noire uniformément distribuée dans la galaxie, contrairement à la matière visible qui est concentrée près du centre.

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Une boule d'un diamètre de 57,0 mm roule sur un billard à la vitesse constante de 3,58 m/s. Quelle est sa vitesse angulaire de rotation ?
Justifiez l'emploi des formules que vous utilisez.

En un tour, soit 2π radians, la boule parcourt la distance $2\pi R$.
Elle met pour parcourir cette distance le temps $t = 2\pi R/v$.
Elle effectue donc une rotation de 2π radians en un temps $2\pi R/v$.
Sa vitesse angulaire est donc v/R rad/s = 3,58 / (0,057 / 2) rad/s = 126 rad/s

2. Un bloc de 2,0 kg se déplace sur une surface horizontale, le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et la surface étant de $\mu_c = 0{,}316$.
Alors que sa vitesse est de 1,0 m/s, il vient comprimer un ressort dont la constante de rappel est k = 100 N/m.
Quelle distance supplémentaire le bloc parcourra-t-il sur la surface horizontale avant de s'arrêter ?

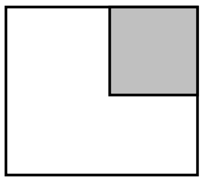
L'énergie cinétique du bloc est transformée en énergie potentielle élastique du ressort + travail de la force de frottement (laquelle est donnée par $\mu_c\, m\, g$)

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \mu_c m g x$$

$$x = \frac{-\mu_c m g + \sqrt{\mu_c^2 m^2 g^2 + k m v^2}}{k}$$

(le signe + doit être pris devant la racine, pour avoir une solution physique x > 0)

3. D'une plaque métallique carrée de 2,00 m de côté, on a enlevé un carré de 1,00 m de côté, de la manière indiquée.
Quelle est la position du centre de gravité de la partie restante de la plaque ?



Soit x la direction horizontale, avec pour origine le sommet opposé à celui qui a été enlevé.
Le centre de gravité du rectangle formé par les deux quarts restants, compris entre x = 0 et x = 1 m, a pour coordonnée x = 0,5 m ; le poids correspondante est 1/2 du poids P de la plaque complète.
Le centre de gravité du carré restant situé entre x = 1 m et x = 2 m, a pour coordonnée x = 1,5 m ; le poids correspondant est P/4.
Coordonnée x du centre de gravité :

$$x_{CG} = \frac{0{,}5\,\mathrm{m}\,P/2 + 1{,}5\,\mathrm{m}\,P/4}{3P/4} = \frac{2{,}5}{3}\,\mathrm{m} = 0{,}833\ \mathrm{m}$$

Par symétrie, la coordonnée y du centre de gravité a la même valeur.

4. A la foire, un manège qui a la forme d'un disque uniforme de 4,00 m de diamètre et dont la masse est de 600 kg tourne à une vitesse angulaire constante de 0,20 tours/s. Quatre personnes pesant chacune 75 kg montent simultanément sur son pourtour.
a) Quelle est maintenant la vitesse angulaire du disque ?
b) Quelle serait-elle si les quatre personnes avaient sauté sur le pourtour du disque avec une vitesse de 3,6 km/h dirigée dans le sens de rotation du disque ?

a) Conservation du moment cinétique : $I_0\,\omega_0 = I_1\,\omega_1$ (1)
Moment d'inertie d'un disque de rayon R et de masse M : $I_0 = 1/2\ M\,R^2 = 1200$ kg m^2
Moment d'inertie total supplémentaire dû aux 4 personnes de masse m situées à la distance R du centre : $4\ m\,R^2 = 1200$ kg m^2 => $I_1 = 2400$ kg m^2

(1) => $1200\ \omega_0 = 2400\ \omega_1$ => $\omega_1 = \omega_0 / 2 = 0{,}10$ tour / s (= 0,63 rad/s)

b) Moment cinétique des 4 personnes = moment de la quantité de mouvement = 4 m v R
Le moment cinétique initial (disque + personnes) est cette fois
$L_0 = I_0\,\omega_0 + 4\ m\ v\ R = (1200\ .\ 0{,}2\ .\ 2\pi + 4\ .\ 75\ .\ 1\ .\ 2)$ kg m^2 / s = 2108 kg m^2 / s
Conservation du moment cinétique :
$L_1 = I_1\,\omega_1 = L_0$ => $\omega_1 = L_0 / I_1 = 2108$ (kg m^2 / s) / 2400 (kg m^2) = 0,88 rad/s

5. Un réservoir de très grand volume, de hauteur H, posé sur le sol, est rempli d'eau (supposée liquide parfait).
D'un petit trou percé à la hauteur h du sol sort un jet d'eau, émis à l'horizontale.
Etablissez la relation entre la distance horizontale atteinte par le jet et la hauteur h du trou.
Quelle doit être la position de h pour que le jet aille le plus loin possible ?

Torricelli : $v = (2\ g\ (H-h)\ )^{1/2}$
Temps de chute du liquide : $t = (2\ h / g\ )^{1/2}$
Distance horizontale $D = v_x\ t = (4\ (H-h)\ h\ )^{1/2} = 2\ (H\,h - h^2\ )^{1/2}$
Distance maximum : la dérivée de D par rapport à h doit être nulle
=> $(H\,h - h^2\ )^{-1/2}\ .\ (H - 2\ h\ ) = 0$ => $h = H / 2$

PHYS-F-104
Physique
Examen du 29 mai 2008

I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Soient deux sphères d'aspects semblables et de mêmes dimensions, l'une pleine et l'autre creuse, cette dernière étant remplie d'un liquide pour lequel les forces moléculaires liquide – matériau de la sphère sont faibles.
Les masses totales des deux sphères sont les mêmes.
Les deux sphères sont posées sur une table. On les fait tourner toutes les deux avec la même vitesse angulaire autour de l'axe vertical passant par leur centre, puis on les arrête en un temps très court.
Comment reconnaître la sphère remplie de liquide (justifiez) ? Quel est le principe de base auquel vous faites appel ?
(3 points)

Deux manières possibles :
- Il faut exercer une force plus grande pour arrêter la sphère solide, car toute sa masse doit être amenée au repos. Par contre, pour la sphère creuse, le liquide intérieur continue sa rotation par inertie.
- Quand on supprime la force qui a arrêté les mouvements, la sphère pleine reste à l'arrêt, alors que celle remplie de liquide reprend sa rotation : pendant la courte période d'arrêt, le liquide a continué son mouvement, par inertie. Quand on relâche, le liquide entraîne la sphère.
Principe de base : conservation du moment cinétique.

2. Supposez que la vitesse d'un corps dans un certain milieu soit donnée, en fonction du temps, par la relation
$$v(t) = A\sqrt{t} + B,$$
où A et B sont des constantes.
a. quelles sont, dans le Système international, les unités de A et B ? Justifiez
b. exprimez l'accélération du corps en fonction du temps.
(3 points)

a. Les unités de $A\sqrt{t}$ et B sont les mêmes que celles de v, soit des m/s
unités de A : m $s^{-3/2}$
unités de B: m s^{-1}
b. on trouve l'accélération en dérivant la vitesse instantanée par rapport au temps, soit
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2}A/\sqrt{t} = \frac{1}{2}A\sqrt{t}/t$$

3. Etablissez la forme de l'énergie potentielle gravitationnelle pour un champ gravitationnel constant (justifiez).
(3 points)

La variation de l'énergie potentielle correspondant à une force conservative, lors du mouvement du point i au point f, est égale à – le travail de la force.

Pour un champ constant dirigé selon l'axe –z (l'axe z es choisi orienté vers le haut), la force gravitationnelle est

$$\Delta E_{P,G} = -\int_i^f m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -(-m\,g)\,(z_f - z_i) = m\,g\,\Delta z$$

$$\Rightarrow E_{P,G} = m\,g\,z \quad \text{(+ cte, prise = 0 pour } z = 0)$$

4. Que peut-on dire de la superposition des deux ondes définies par les fonctions d'ondes suivantes : A sin ωt et A cos (ωt + π/2). Justifiez.
(2 points)

cos (ωt + π/2) = - sin ωt
=> les deux ondes sont en opposition de phase et de même amplitude
=> leur superposition = 0

5. Définissez et donnez les unités dans le Système international de :
a. moment d'une force
b. moment d'inertie d'un corps solide homogène
c. moment cinétique d'un système de point matériels
(définissez avec précision les quantités utilisées)
(6 points)

a. Moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O

$$\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = r\,F\,\sin\theta(\vec{r},\vec{F})\,\vec{1}_\perp$$

où $\vec{r}$ est le vecteur joignant le point O au point d'application de la force $\vec{F}$

$\vec{1}_\perp$ perpendiculaire au plan $(\vec{r},\vec{F})$, orienté selon la convention choisie (ex. règle du tire-bouchon)

Unités : kg m^2 s^{-2}

b. Moment d'inertie par rapport à un axe de rotation d'un système de points matériels i de masse m_i situés à la distance r_i de l'axe :

$$I_O = \sum_i m_i\, r_i^2$$

$$= \int r^2\, dm \text{ si le système est continu (corps solide)}$$

$$= \int_V r^2 \rho\, dV \text{ si le système est un corps homogène, de masse volumique } \rho$$

Unités : kg m^2

c. Moment cinétique par rapport à un point O d'un système de point matériels i d'impulsion $\vec{p}_i$:

$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ où $\vec{r}_i$ est le vecteur joignant le point O au point i

Unités : kg m^2 s^{-1}

6. Expliquez le phénomène des marées.
(3 points)

voir notes du cours

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Un jardinier arrose son jardin avec de l'eau de pluie recueillie dans un grand tonneau, posé sur le sol, dans lequel l'eau atteint une hauteur de 1,8 m.
Le tuyau d'arrosage, long de 2,25 m, est raccordé à un robinet situé à 30 cm au-dessus du sol.
Le jardinier tient l'extrémité libre du tuyau à 1,0 m au-dessus du sol et il l'oriente sous un angle faisant 30° avec l'horizontale.
A quelle distance (horizontale) de l'extrémité du tuyau tenue par le jardinier le jet arrose-t-il le sol ?
(on néglige les frottements, la viscosité de l'eau et la baisse du niveau de l'eau dans le tonneau au cours de l'arrosage)
(4 points)

Théorème de Torricelli : la vitesse de l'eau à la sortie du tuyau est $v_0 = (2\ g\ \Delta h\ )^{1/2}$,
où Δh = 0,80 m est la différence d'altitude entre la surface supérieure de l'eau et le point d'échappement libre
=> v_0 = 4,00 m/s.
Balistique : équation du mouvement selon l'axe vertical :
$z = 1/2\ g\ t^2 + v_{0,z}\ t + z_0$,
où t est la durée du mouvement de l'eau entre la sortie du tuyau et son arrivée sur le sol,
et où $z = 0$ (niveau du sol), z_0 = 1,0 m, $v_{0,z} = v_0 \sin 30° = 2{,}00$ m/s
(on prend l'axe z vers le haut => $g = -10\ m\ s^{-2}$)
=> $0 = 1/2\ g\ t^2 + 2{,}00\ t + 1{,}0$
=> t = 0,690 s
Composante horizontale de la vitesse de l'eau à la sortie du tuyau :
$v_{0,H} = v_0 \cos 30° = 3{,}46$ m/s
Distance atteinte par le jet : $x_0 = v_{0,H}\ t = 2{,}4$ m

2. Une pierre de 100 g est attachée à une corde sans masse, longue de 1,00 m, dont l'autre extrémité est fixée par un crochet à un mur. A la verticale du crochet, 75 cm sous celui-ci, un clou sort du mur.
La corde étant tendue à horizontale, on lâche la pierre sans vitesse initiale.
Quelles sont la grandeur et la direction de la vitesse de la pierre au point de hauteur maximale qu'elle atteindra après que la corde aura été interceptée par le clou ?
(expliquez, démontrez)
(4 points)

La pierre suit d'abord une trajectoire circulaire, de rayon 1,00 m, centrée sur le point d'attache.
Au moment où la pierre passe à la verticale de son point d'attache (et à la verticale du clou), la corde est interceptée par le clou, et la pierre décrit alors une trajectoire circulaire, centrée sur le clou, de rayon 25 cm.
En suivant cette trajectoire, la pierre atteint son point le plus haut à 50 cm sous le point d'attache de la corde.
L'énergie cinétique de la pierre en ce point est égale à la différence entre l'énergie potentielle à la position de départ de la pierre et l'énergie potentielle en ce point:
$1/2\ m\ v^2 = m\ g\ \ \Delta h \Rightarrow v = (2\ g\ \Delta h)^{1/2} = 3{,}2$ m/s
La vitesse au point le plus haut est horizontale (tangente à la trajectoire)

3. Soit un corps solide sphérique homogène de 10 cm de rayon, dont le moment d'inertie autour d'un axe passant par son centre est de 0,020 kg m^2.
a. Sous l'action de la chaleur, cet objet se dilate uniformément, son rayon devenant 11 cm. Que devient son moment d'inertie ? Démontrez.
b. Quel est le moment d'inertie d'un objet sphérique, composé de la même matière et à la même température que celui décrit dans l'énoncé initial, mais dont le rayon est de 20 cm ? Démontrez.
(4 points)

a. Pour un corps homogène, $I \propto R^2 M$
Puisque la masse M du corps reste constante :
$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{R_1^2}{R_0^2} \Rightarrow I_1 = \frac{R_1^2}{R_0^2} I_0 = \frac{121\,cm^2}{100\,cm^2} I_0 \Rightarrow I_1 = 1{,}21\,I_0 = 0{,}024\ kg\ m^2$$

b. Cette fois, la masse volumique ρ (et non la masse totale) est la même que dans l'énoncé initial..
Le moment d'inertie est
$I \propto M\,R^2 \propto \rho\,R^3\,R^2$ puisque $M \propto \rho\,R^3$
$\Rightarrow I \propto \rho\,R^5$
$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = \frac{R_1^5}{R_0^5} \Rightarrow I_1 = \frac{R_1^5}{R_0^5} I_0 = 2^5\ I_0 \Rightarrow I_1 = 32\ I_0 = 0{,}64\ kg\ m^2$$

4. Dans l'espace, un astronaute dont le poids sur terre est de 1 200 N, scaphandre compris, s'écarte d'une capsule, dont la masse est de 1 500 kg, en exerçant avec ses jambes fléchies une poussée uniforme de 30,0 N pendant 2,00 s.
A quelle vitesse, exprimée en km/h, l'astronaute et la capsule s'écartent-ils l'un de l'autre ?
(4 points)

Deuxième loi de Newton : la quantité de mouvement p = m v de l'astronaute est modifiée de $\Delta p_a = F\ \Delta t = 60{,}0$ kg m s^{-1}
Conservation de la quantité de mouvement totale : la capsule s'éloigne avec une quantité de mouvement égale en grandeur et opposée : $\Delta p_c = -\ F\ \Delta t = -\ 60{,}0$ kg m s^{-1}
Masse de l'astronaute = poids / g = 120 kg.
Vitesse de l'astronaute par rapport à sa position initiale :
 $v = p_a$ / m = 60,0 kg m s^{-1} / 120 kg = 0,500 m/s.
Vitesse de la capsule par rapport à sa position initiale:
 $v = p_c$ / m = -60,0 kg m s^{-1} / 1500 kg = -0,040 m/s.
Vitesses relatives de l'astronaute et de la capsule = $v_a - v_c$ = 0,540 m/s = 1,94 km/h.

5. Une poutre homogène de 20 kg et 4,00 m de long est posée en porte-à-faux sur un échafaudage, qu'elle dépasse de 80 cm.
Un ouvrier imprudent, dont le poids est de 750 N, s'aventure sur la poutre, au-dessus du vide.
Jusqu'où peut-il s'avancer sans que la poutre ne bascule ?
(4 points)

Prenons $x = 0$ à l'extrémité de l'échafaudage.
L'extrémité en porte-à-faux de la poutre est en $x_E = D = 80$ cm
Le centre de gravité de la poutre est en $x_C = D - L/2 = 80 - 200 = -120$ cm.
La situation extrême est celle où la somme des moments des forces s'annule, c'est-à-dire quand le moment du poids de la poutre (= 200 N) par rapport à l'extrémité de l'échafaudage est égal en valeur absolue au moment du poids de l'ouvrier :
$-120 \cdot 200 + x \cdot 750 = 0 \Rightarrow x = 32$ cm
La poutre basculera si l'ouvrier dépasse l'extrémité de l'échafaudage de plus de 32 cm.

PHYS-F-104
Physique
Examen du 14 août 2008
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Pour un mouvement circulaire, quelle est la relation entre la composante tangentielle de l'accélération et la vitesse ?
Démontrez en partant de la définition de l'accélération.
(4 points)

La composante tangentielle de l'accélération est la dérivée par rapport au temps de la vitesse scalaire :

$$a_T = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|\,\vec{1}_V)}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt}\vec{1}_V + |\vec{v}|\frac{d(\vec{1}_V)}{dt} \quad \text{où} \quad \vec{1}_V = \vec{1}_T$$
$$= \frac{d(|\vec{v}|)}{dt}\vec{1}_T + |\vec{v}|\,\omega\,\vec{1}_N$$

2. Etablissez (« démontrez ») la vitesse de libération d'un satellite à la surface de la Terre (c'est-à-dire la vitesse nécessaire pour qu'il puisse échapper à l'attraction terrestre).
(3 points)

L'énergie cinétique du satellite à la surface de la Terre doit lui permettre d'atteindre une distance infinie, et doit donc être au moins égale à son énergie potentielle gravitationnelle à l'infini.

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} \geq 0 \ \text{ à l'infini } \ \Rightarrow v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

3. Une personne est debout au centre d'une plate-forme circulaire supportée par un axe passant par son centre. Ses pieds sont fixes par rapport à la plate-forme
Expliquez comment la personne peut se faire tourner, c'est-à-dire faire tourner la plate-forme, sans prendre appui sur aucun élément extérieur et sans bouger les pieds.
(Détaillez la démonstration - une réponse lapidaire ne suffit pas)
(3 points)

Voir notes du cours

4. Démontrez la troisième loi de Kepler, qui relie la période de révolution des planètes autour du Soleil au rayon de leur trajectoire (supposée circulaire)
(3 points)

La force centripète est donnée par l'attraction gravitationnelle de Newton,

$$\left|\vec{F}\right| = m\omega^2 R = G\frac{Mm}{R^2},$$

avec $\omega = 2\pi/T$ => T^2 / R^3 = constante

5. Enoncez les lois de la statique
(2 points)

La somme des forces extérieures exercées sur un corps et la somme de leurs moments (par rapport à n'importe quel point) doivent être nulles.

6. Etablissez le moment cinétique d'une barre homogène de masse M et de longueur L pour la rotation autour d'un axe perpendiculaire à la barre et passant pas son centre
(3 points)

$$\vec{L}_O = I_O\,\vec{\omega}$$

$$\text{avec } I_O = 2\int_0^{L/2} x^2\,\frac{M}{L}\,dx = 2\frac{M}{L}\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/2} = \frac{1}{12}M\,L^2$$

7. Sur quoi porte la loi de Poiseuille ?
(2 points)

Le débit volumique d'un fluide visqueux.

II. Exercices (20 points – 2 heures)

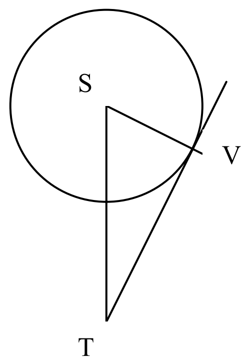
1. Un camion long de 12 m roule à 90 km/h. Un camion long de 18 m entreprend de le dépasser. Quelle doit être la vitesse moyenne minimale du deuxième camion (exprimée en km/h) pour que le temps de dépassement soit inférieur à une demi-minute ?
(4 points)

A la fin du dépassement, les positions relatives de l'avant du deuxième camion et de l'arrière du premier sont séparées de 30 m au moins.
Le dépassement devant se faire en moins de 30 s, la vitesse relative minimale du deuxième camion par rapport au premier est
Δv_{min} = 30 m / 30 s = 1 m/s = 3,6 km/h.
La vitesse moyenne minimale du deuxième camion pendant le dépassement est donc de 94 km/h.

2. A la foire, une nacelle guidée par des rails inclinés à 40 ° avec l'horizontale est libérée depuis une position de départ située à 40 m au-dessus du sol.
Après être descendue jusqu'à 15 m au-dessus du sol, elle fait un parcours horizontal de 12 m avant de remonter en effectuant un parcours de 30m, les rails faisant cette fois avec l'horizontale un angle de 30°.
Quelle est la vitesse de la nacelle à la fin de cette remontée, exprimée en km/h, si on néglige tous les frottements cinétiques ?
(4 points)

La vitesse est donnée par l'énergie cinétique à la fin de la remontée, qui est égale à la perte d'énergie potentielle (conservation de l'énergie), la vitesse initiale étant nulle (la nacelle est « libérée »).
La nacelle descend à une altitude de 15m, puis remonte de 15 m
(triangle rectangle : 30m . sin (30°) = 15 m).
Elle est remonte donc à la hauteur de 30m, soit 10 m plus bas que sa hauteur initiale.
Par conservation de l'énergie, la vitesse initiale étant nulle :
$mg\ \Delta h = 1/2\ m\ v^2 \Rightarrow v^2 = 2\ g\ \Delta h \Rightarrow v = \sqrt{200}$ m/s = 14 m/s = 51 km/h.

3. L'écart angulaire maximum entre le Soleil et Vénus (une planète située entre la Terre et le Soleil), observé depuis la Terre, est de 46 degrés.
a. Supposant que la trajectoire de Vénus est circulaire et située dans le même plan que celle de la Terre, faites un schéma représentant la trajectoire de Vénus autour du Soleil et les positions de la Terre et de Vénus quand l'écart angulaire est maximum.
b. Quelle est la durée de la révolution de Vénus ?
(Rappel : l'angle entre la tangente à un cercle et le rayon aboutissant au point de tangence est de 90 degrés).
(4 points)



Lors de l'écart maximum, Vénus, la Terre et le Soleil forment un triangle rectangle, Vénus étant situé à l'angle droit. Le rayon de la trajectoire de Vénus est donc celui de la trajectoire de la Terre fois le sinus de l'écart angulaire maximum, soit

$R_V / R_T = \sin(46°)$

Troisième loi de Kepler : T^2 / R^3 = constante

$\Rightarrow T_V = T_T$ (= 1 an) . $(R_V / R_T)^{3/2} = \sin^{3/2}(46°)$ ans = 0,61 années

4. Un maçon lance à un autre ouvrier, situé 2 m plus bas que lui, une brique de 5 kg, en lui donnant une vitesse horizontale de 1 m/s.
Le second ouvrier arrête la brique en 0,3 s en exerçant une force supposée constante. Quelle est la grandeur de cette force ?
(4 points)

Conservation de l'énergie lors du mouvement de la brique entre les mains du premier maçon et celles du second :

$E_{cin}(i) + E_{pot}(i) = E_{cin}(f) + E_{pot}(f)$

$1/2\ m\ v^2(i) + mgh = 1/2\ m\ v^2(f) + 0$

(on a pris $E_{pot} = 0$ à la hauteur des mains du second maçon)

$\Rightarrow v(f) = \sqrt{[v^2(i) + 2gh]}$

Le second maçon amène la brique au repos, càd fait passer sa quantité de mouvement de mv(f) à 0 en 0,3 s.
Deuxième loi de Newton, pour une force constante : $\Delta p = F\ \Delta t$

$\Rightarrow F = \Delta p / \Delta t = m\ v(f)\ / 0.3\ s = 5kg \sqrt{[v^2(i) + 2gh]} / (0.3\ s) = 10^2\ kg\ m\ s^{-2} = 10^2\ N$

5. Une sphère pleine, d'une masse de 100 g et de 20 cm de diamètre, tourne sans frottement autour d'un axe fixe passant par son centre, à raison de 10 tours par seconde.
a. Exprimez l'énergie cinétique de la sphère en fonction des données ci-dessus (pas besoin de la valeur numérique)
b. On approche perpendiculairement à la surface un frotteur qui exerce un frottement constant sur la sphère et l'arrête en 20 secondes.
Que vaut la composante de la force de frottement tangente à la sphère ?
(4 points)

a. L'énergie cinétique de la sphère est $E_c = 1/2\ I_0\ \omega_0^2$, où $I_0 = 2/5\ M\ R^2$ et $\omega_0 = 2\pi / T$.

b. La perte d'énergie cinétique de la sphère est égale au travail ΔW de la force de frottement. Celle-ci est constante et tangente à la sphère au point de contact.
Son travail est donc $\Delta W = F.s$, où s est la longueur sur laquelle s'est exercé le frottement, qui vaut :

$s = 1/2\ v_0\ t = 1/2\ \omega_0\ R\ t$

(théorème de la vitesse moyenne, l'accélération tangentielle étant constante puisque la force est constante)

On a donc $\Delta W = F\ .\ s = F\ .\ 1/2\ \omega_0\ R\ t \quad = \quad E_c = 1/2\ I_0\ \omega_0^2$

$\Rightarrow F = I_0\ \omega_0 / R\ t = 2/5\ M\ R^2\ \omega_0 / R\ t = 2/5\ M\ R\ \omega_0 / t$ avec $\omega_0 = 2\pi / T$ où $T = 0,1$ s

$\Rightarrow F = 2/5\ .\ 0,100\ kg\ .\ 0,10\ m\ .\ (6,28 / 0,1\ s) / 20\ s = 1,3\ 10^{-2}\ N$

PHYS-F-104
Physique
Examen du 9 janvier 2009
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Montrez que, si la somme des forces s'exerçant sur un corps est nulle et si la somme de leurs moments par rapport à un certain point est nulle, celle-ci est nulle par rapport à n'importe quel point.
(3 points)

Somme des moments par rapport au point O :
$\sum_i \vec{\tau}_O(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i$ où $\vec{F}_i =$ forces extérieures de point d'application A_i

Somme des moments par rapport à n'importe quel point P :
$\sum_i \vec{\tau}_P(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{PA_i} \times \vec{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_i}) \times \vec{F}_i = \overrightarrow{PO} \times (\sum_i \vec{F}_i) + \sum_i \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i = 0 + \sum_i \vec{\tau}_O(\vec{F}_i) = 0$

2. Pour quel type de forces introduit-on la notion d' « énergie potentielle » et pourquoi ?
(2 points)

Pour les forces conservatives, c'est-à-dire les forces dont le travail qu'elles accomplissent ne dépend que des positions initiale et finale :
$\Delta W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}$
On peut en effet alors définir une fonction, l'énergie potentielle, ne dépendant que des positions (i , f), dont la variation est égale au travail fourni contre la force.
Autrement dit, on peut alors définir un *potentiel*, c'est-à-dire une fonction scalaire dont la force est la dérivée (ou plus généralement le gradient) :
$F = -\dfrac{dU(s)}{ds}$, ou plus généralement $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

3. Comment peut-on freiner la rotation d'un satellite sur lui-même ? Expliquez, justifiez.
(2 points)

Comme le moment des forces extérieures agissant sur le satellite est nul (en fait, la seule force est la force gravitationnelle, qui s'exerce sur le centre du satellite), il y a conservation du moment cinétique $\vec{L}_O = I_O\,\vec{\omega}$
On peut diminuer ω en augmentant le moment d'inertie du satellite, par exemple en déployant vers l'extérieur des bras porteurs de masse.

4. Définissez (si vous donnez des formules, définissez les quantités utilisées) (6 points)

a. moment d'une force

Moment d'une force par rapport à un point O

$\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \;=\; r\,F\,\sin\theta(\vec{r},\vec{F})\,\vec{1}_\perp$

où $\vec{r} =$ vecteur joignant le point O au point d'application de $\vec{F}$

$\vec{1}_\perp$ perpendiculaire au plan $(\vec{r},\vec{F})$, orienté selon la convention choisie

b. moment d'inertie d'un système de points matériels

Moment d'inertie d'un système de points par rapport à un axe z :

$I_z = \sum_i m_i\, r_i^2 = \int r^2\, dm$ où r_i est la distance du point i de masse m_i à l'axe z

c. moment cinétique d'un système de point matériels

Moment cinétique d'un système de point matériels de quantité de mouvement $\vec{p}_i$ par rapport à un point O auquel on rapporte les vecteurs de position $\vec{r}_i$:

$\vec{L}_O^{syst} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

5. Expliquez le principe de l'attraction par le vide partiel. (3 points)

Deux plateaux circulaires horizontaux sont séparés de Δh. Entre eux s'écoule un fluide arrivant par un trou central dans l'un des plateaux

Equation de continuité : $v\,2\pi r\,\Delta h = Cte \quad \rightarrow \quad v \searrow$ quand $r \nearrow$

Or Bernouilli : $P + \frac{1}{2}\rho\, v^2 = Cte$

$\rightarrow$ $P \nearrow$ quand $r \nearrow$, avec $P_{\max} = P_{atm}$

$\rightarrow$ dépression ("vide partiel") au centre, attraction entre les plateaux

6. Montrez que, pour de petits angles, le mouvement d'un pendule obéit à la loi de l'oscillateur harmonique. (4 points)

La composante tangentielle de l'accélération est donnée par la projection sur la tangente à l'arc de cercle (de rayon L) du poids de l'objet suspendu :

$m\,a_T = -m\,g\sin\theta \simeq -m\,g\,\theta \simeq -m\,g\,\frac{l}{L}$ où $l = \theta L =$ longueur de l'arc

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{g}{L} l = 0$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique,

avec $\omega = \sqrt{g / L}$

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Un lièvre court à la vitesse de 30,0 km/h en décrivant un arc de cercle d'un rayon de 60,0 m autour d'un chasseur. Dans quelle direction le chasseur doit-il viser, sachant que la vitesse de la balle est de 300 m/s ?
Exprimez la réponse en degrés.
(4 points)

Vitesse angulaire du lièvre : $\omega = v_l / R = (30000 \text{ m} / 3600 \text{ s}) / 60{,}0 \text{ m} = 5{,}00 / 36{,}0$ rad/s
Temps de parcours de la balle : $\Delta t = 60{,}0 \text{ m} / 300 \text{ m/s} = 1/5{,}00$ s
Angle parcouru par le lièvre en ce temps :

$$\theta = \omega\, \Delta t = 1/36{,}0 \text{ rad} = 1/36{,}0\ (180° / \pi) = 5{,}00/ \pi\ ° = 1{,}59°$$

Le chasseur doit viser sous un angle de 1,59° devant le lièvre.

2. Un objet de masse m = 100 g est lancé à la vitesse de 1,00 m/s sur un plan horizontal. Après 1,00 m, sa vitesse est divisée par deux à cause du frottement.
a. Quel est le coefficient de frottement ?
b. Après la distance de 1,00 m parcourue à l'horizontale, l'objet monte un plan incliné à 30,0 degrés, pour lequel le coefficient de frottement a la même valeur que sur la partie horizontale. A quelle hauteur l'objet monte-t-il sur le plan incliné avant de s'arrêter ?
Justifiez chaque étape du raisonnement !
(4 points)

a. La perte d'énergie cinétique a été absorbée par le travail de la force de frottement F_f qui a agit sur la distance d :

$$W = F_f \cdot d = 1/2\, m v_0^2 - 1/2\, m \frac{v_0^2}{4} = \frac{3}{8} m v_0^2$$

La force de frottement est donc

$$F_f = \frac{3}{8} m v_0^2 / d$$

Le coefficient de frottement est donné par

$$F_f = \mu_c mg \Rightarrow \mu_c = \frac{3}{8} \cdot 0{,}100 \cdot 1{,}00^2 \ / \ (1{,}00 \cdot 0{,}100 \cdot 10{,}0) = 3/80$$

b. L'énergie cinétique au bas du plan incliné est égale à l'énergie potentielle au moment de l'arrêt + le travail de la force de frottement.
La force de frottement est donnée sur le plan incliné par $F_f = \mu_c F_N = \mu_c mg \cos 30$
Elle agit sur la distance $L = h / \sin 30° = 2h$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} m v_0^2 = mgh + F_f L = 0{,}100 \cdot 10{,}0 \cdot h + \frac{3}{80} \cdot 0{,}100 \cdot 10{,}0 . \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2h = h\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{80}\right)$$

La hauteur h est donc $h = \dfrac{\frac{1}{8} \cdot 0{,}100 \cdot 1{,}00^2}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{80}} = 0{,}012$ cm

3. Définissons les trous noirs comme des objets célestes tels que la vitesse de libération à leur surface est supérieure à la vitesse de la lumière.
a. Quel est le rayon (maximum) d'un trou noir de la masse du Soleil ?
b. Quel est le rayon du trou noir au centre de notre Galaxie, dont la masse est 10^6 fois la masse du Soleil ? Combien de temps la lumière met-elle pour parcourir une distance de cet ordre ?
c. Quel est le rapport des masses volumiques d'un trou noir ayant la masse du Soleil est d'un trou noir correspondant à 10^6 masses solaires ?
Prendre pour la constante de Newton G = 6.67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}, pour la masse du Soleil M = 2,00 10^{30} kg et pour la vitesse de la lumière c = 300 10^3 km/s
(4 points)

Vitesse de libération d'un objet de masse m émis à la surface d'un corps céleste sphérique de masse M et de rayon R :

$$GmM/R = 1/2\, mv^2 \dashrightarrow v^2 = 2GM/R$$

a. R = 2GM / c^2 = 2,96 km
b. R = 2.96 10^6 km.
Ceci correspond à la distance parcourue par la lumière en 9,87 secondes
c. Le rapport des masses et celui des rayons sont tous les deux de 10^{-6}. Le rapport des volumes est donc de $(10^{-6})^3$, et le rapport des masses volumiques de $10^{-6} / (10^{-6})^3 = 10^{12}$

4. Un objet posé sur un plan horizontal parfaitement lisse est attaché à l'extrémité d'une corde (supposée sans masse) dont l'autre extrémité est attachée à la base d'un poteau de rayon *a* = 0,5 cm.
La corde étant tendue, l'objet est situé à une distance R_0 = 2,0 m du centre du poteau.
Il alors lancé avec une vitesse perpendiculaire à la corde, de façon à décrire une trajectoire horizontale autour du pied du poteau. La vitesse initiale est v_0 = 5,0 m/s.
a. Compte tenu de ce que la corde s'enroule autour du poteau, à quelle distance du centre du poteau se trouve l'objet quand il a décrit un angle θ ?
b. Après six tours, quelle est la vitesse angulaire de l'objet, exprimée en tours par seconde ?
On fait l'approximation que la corde est toujours dirigée vers l'axe du poteau.
Justifiez vos raisonnements.
(4 points)

a. Après un angle θ, la corde s'est enroulée d'une longueur θa autour du poteau, et l'objet est donc rapproché à la distance $R = R_0 - \theta a$ (θ en radians).
NB que la corde reste tendue car la vitesse initiale est tangente à la trajectoire et il n'existe pas d'autre force agissant sur la masse que la tension de la corde.
b. La seule force exercée sur l'objet est la tension de la corde, qui est dirigée vers le centre de rotation. Son moment par rapport au centre de rotation est donc nul et le moment cinétique est conservé.
On a donc $mv_0R_0 = mvR = m\omega R^2$ soit, après n tours :

$$\omega = \frac{v_0R_0}{R^2} = \frac{v_0R_0}{(R_0 - n2\pi a)^2}$$

et après 6 tours 3,05 rad/s.
Un tour/s correspond à 2π rad/s => la vitesse angulaire est de ($3,05 / 2\pi$) = 0,49 tours/s

5. Un tonneau de 2,00 m de diamètre, rempli d'eau jusqu'à une hauteur de 2,50 m, est posé en hauteur. On laisse s'échapper verticalement l'eau par un trou de 1,0 cm de diamètre, situé au fond du tonneau.
Quel est le diamètre du filet d'eau (exprimée en cm), à 1,00 m sous le fond du tonneau ? (Négligez la vitesse à laquelle baisse le niveau de l'eau dans le tonneau).
(4 points)

Théorème de Bernouilli (on prendra l'axe *y* vers le haut):
$P_0 + 1/2\rho v_0^2 + \rho|g|y_0 = P_1 + 1/2\rho v_1^2 + \rho|g|y_1$ où $P_0 = P_1 = P_{atm}$ et $v_0 = 0$
Donc : $v_1^2 = 2|g|(y_0 - y_1) \Rightarrow v_1 = -\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2{,}50}$ m/s $= -7{,}07$ m/s
On prend la solution – car cette vitesse est dirigée vers le bas.

Equation de continuité entre les hauteurs y_1 (fond du tonneau, aire S_1, vitesse v_1) et y_2 (1,00 m sous le fond du tonneau, aire S_2, vitesse v_2) : $v_1 S_1 = v_2 S_2$

Vitesse v_2 (dirigée vers le bas) de l'eau à la distance y_2 sous le fond du tonneau, après un parcours en chute libre de temps *t* :

$y_2 - y_1 = 1/2\ (-)|g|\ t^2 + v_1 t \Rightarrow t = 0{,}130$ s

$\Rightarrow v_2 = v_1 - |g|\ t = -8{,}37$ m/s

Aire du filet d'eau (on note D les diamètres) :
$\pi \cdot D_2^2 / 4 = \pi \cdot D_1^2 / 4 \cdot v_1 / v_2 \Rightarrow D_2 = D_1 \cdot \sqrt{7{,}07 / 8{,}37} = 0{,}92$ cm

NB.
On peut utiliser directement le théorème de Torricelli.
La vitesse d'écoulement à 2,5 m est la même que celle atteinte en chute libre.
La vitesse 1m plus bas est celle atteinte en chute libre après 3,5m, soit
$v_2 = -gt = -g\sqrt{2 \cdot 3{,}5\text{m} / g} = -8{,}37$ m/s

PHYS-F-104
Physique
Examen du 28 mai 2009
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Donnez la loi de la gravitation de Newton, en définissant chacun des symboles. (soyez précis !)
(3 points)

$$\vec{F}_G = -G\frac{M\,m}{d^2}\vec{1}_d$$

$\vec{F}_G$ est la force de la gravitation
G est une constante universelle
M est la masse du corps exerçant la force d'attraction gravitationnelle
m est celle du corps sur lequel cette force est exercée
d est la distance entre eux
$\vec{1}_d$ est le vecteur unitaire dirigé du corps qui exerce la force vers celui sur lequel elle s'exerce

2. a) Démontrez que, pour qu'un système de points matériels sur lequel s'exercent trois forces non nulles soit au repos, il faut que les trois forces soient concourantes.
b) Cette condition est-elle suffisante ? Pourquoi ?
(3 points)

a) Pour que le corps soit au repos, il faut que la somme (vectorielle) des moments des forces par rapport à un point quelconque donné soit nulle.
Considérons le point d'intersection O de deux des forces. Par rapport à ce point, les moments des deux forces sont nuls. Il faut que le moment de la troisième force par rapport à O soit également nul, donc que O soit sur sa ligne de force.
b) La condition n'est pas suffisante, car il faut aussi que la somme vectorielle des forces soit nulle.

3. Définissez les quantités suivantes par une formule (pas besoin de définir les composantes de la formule) et donnez leurs unités dans le système international :
a. puissance
b. moment cinétique
c. énergie cinétique
d. module de Young
(4 points)

a. $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F}\cdot\vec{l})}{dt}$
kg m^2 s^{-3}

b. $\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$
kg m^2 s^{-1}
c. K = ½ m v^2
kg m^2 s^{-2}
d. E = σ / ε = contrainte / déformation
kg m^{-1} s^{-2}

4. Quelle est la fréquence résultant de la superposition des ondes sonores définies par les relations suivantes
$y_1 = a_1 \sin(2600\, t + \pi / 6)$ et $y_2 = a_2 \cos(2600\, t + \pi / 6)$.
(3 points)

Les deux ondes ayant la même fréquence, leur superposition aura la même fréquence.
La pulsation $\omega = 2\,\pi\,\nu$ est de 2600 rad s^{-1} => la fréquence $\nu = \omega / 2\,\pi = 2600 / 2\,\pi = 413$ Hz.

5. Un tuyau est raccordé à un tonneau rempli d'eau, ouvert à l'air libre. L'extrémité libre du tuyau est située à une hauteur *h* en-dessous de la surface de l'eau dans le tonneau, et elle est inclinée d'un angle θ avec l'horizontale. A quelle hauteur l'eau s'échappant du tuyau remonte-t-elle ?
(Négligez les effets de frottement et de viscosité)
(4 points)

Par le théorème de Torricelli, la vitesse de l'eau à la sortie du tuyau est celle qui serait atteinte par un corps en chute libre depuis une hauteur correspondant à la différence de hauteur entre la surface de l'eau et l'extrémité libre du tuyau :
$\frac{1}{2}\, m\, v^2_{tuy.} = m\, g\, h$ (conservation de l'énergie)
La composante verticale de la vitesse de l'eau à la sortie du tuyau est $v_{vert} = v_{tuy.} \sin\theta$
Conservation de l'énergie : l'eau remonte jusqu'à une hauteur donnée par cette énergie cinétique, soit $m\, g\, h_{max} = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{vert} = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{tuy.} \sin^2\theta = m\, g\, h \sin^2\theta$
=> $h_{max} = h \sin^2\theta$

6. Quelle est la vitesse maximale d'un ressort de constante de rappel k, oscillant d'une longueur *L* autour de sa position de repos ?
(3 points)

Conservation de l'énergie (cinétique + potentielle), au centre d'oscillation (O) et à l'extrémité de l'oscillation (L)

$$E(0) = \tfrac{1}{2} m v_{\max}^2 + 0 = E(L) = 0 + \tfrac{1}{2} k L^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, L$$

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Pour décoller, un avion dont la masse totale est de 60 10^3 kg doit atteindre la vitesse de 300 km/h.
Si la piste de décollage est de 1500 m, en supposant que la force exercée par les moteurs est constante et en négligeant tous les frottements, quelle est la puissance moyenne développée par les moteurs pendant le décollage ?
(4 points)

La force exercée par les moteurs étant constante, le mouvement est uniformément accéléré (a = constante)
=> $d = ½ a t^2 = ½ v t$ (car $v = a t$)
où t est le temps écoulé depuis de début de la manœuvre et v la vitesse atteinte quand la distance d a été parcourue
=> $t = 2 d / v$
Energie cinétique au décollage : $W = ½ m v^2$
Puissance moyenne = travail total / temps total
$= W / t = ½ m v^2 / (2 d / v) = ¼ m v^3 / d = 5{,}8\ 10^6$ W

2. Une poutre homogène longue de 12 m, faisant un angle de 20 degrés avec l'horizontale et pesant 180 N est suspendue en un point situé à 4 m de son extrémité de gauche.
Une charge dont la masse est de 10 kg est attachée à son extrémité de droite.
Quel est le poids de la charge qu'il faut suspendre à l'extrémité de gauche de la poutre pour qu'elle soit en équilibre ?
(4 points)

Remarque : comme vu au cours, l'angle avec l'horizontale est indifférent pour calculer les conditions d'équilibre. On va donc simplifier numériquement le problème en supposant que la poutre est horizontale.

Conservation du moment cinétique (condition d'équilibre statique) : la somme des moments des forces est nulle, et le poids de la poutre s'exerce à 2m à droite du point de suspension :
18 kg . 2m + 10 kg . 8 m = x kg . 4 m où x est la masse de la charge à suspendre.
=> x = 29 kg
=> le poids de cette charge est de 290 N.

3. Quelle inclinaison, exprimée en degrés, faudrait-il donner à une route faisant un virage d'un rayon de 150 m pour qu'une voiture de 1200 kg s'y engageant à 50 km/h ne dérape pas en cas de verglas ?
(4 points)

Dans la courbe, la voiture doit être soumise à une force centripète, horizontale, $m v^2 / R$, qui doit être fournie entièrement par l'inclinaison de la route puisqu'on ne peut compter sur des frottements.
La composante verticale de la réaction du sol doit compenser le poids de la voiture :
$N \cos\theta = mg \Rightarrow N = mg / \cos\theta$
La composante horizontale de la réaction du sol, qui donne la force centripète, est égale à
$N.\sin\theta = mg\ \mathrm{tg}\ \theta = m v^2 / R$
=> $\mathrm{tg}\ \theta = v^2 / Rg$, soit $\mathrm{tg}\ \theta = (50\ 10^3 / 3600\ \mathrm{m/s})^2 / (150\mathrm{m}\ .\ 10\ \mathrm{ms}^{-2}) = 0{,}1286$
soit $\theta = 7{,}3$ °.

4. Un réservoir dont le fond est situé à 340 cm au-dessus du sol contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 120 cm par rapport au fond. Un tuyau d'un diamètre de 1,50 cm, fixé sous le réservoir, amène l'eau dans un bassin disposé à 10 cm au-dessus du sol, par une ouverture située au fond de ce bassin. Celui-ci est initialement vide. La surface du bassin et celle du réservoir sont toutes deux à l'air libre.
a) Quel est le débit massique de l'eau arrivant dans le bassin au début du remplissage ?
b) Si on peut négliger l'aire de la surface libre du bassin par rapport à celle du réservoir, quel sera le débit massique quand l'eau aura atteint la hauteur de 50,0 cm par rapport au fond du bassin ?
La masse d'un litre d'eau est de 1,00 kg.
(4 points)

a) La vitesse de pénétration de l'eau est donnée par le théorème de Torricelli : $v = (2gh)^{1/2}$, où *h* est la différence de hauteur entre la surface de l'eau dans le réservoir et celle de la base du bassin, soit 4,50 m.
Le débit volumique est donné par le produit de la vitesse par la section ; le débit massique est donné par le débit volumique multiplié par la masse volumique.
Le débit massique est donc de
$(2gh)^{1/2}\ (\pi R^2)\ \rho = (\ 90{,}0\ m^2\ s^{-2}\ )^{1/2}\ (\ \pi\ (0{,}75\ 10^{-2}\ m)^2\ )\ 1000\ kg\ m^{-3} = 1{,}68\ kg\ s^{-1}$

b) même formule, la hauteur *h* à prendre en considération étant cette fois $h_1 = 4{,}60 - 0{,}60 = 4m$ (on peut négliger l'abaissement de l'eau dans le réservoir, puisque la surface du bassin est négligeable par rapport à celle du réservoir)
Le débit massique est donné par le débit du a) multiplié par $(h_1 / h)^{1/2}$, soit = $1{,}58\ kg\ s^{-1}$

5. Un ressort de constante de rappel *k* = 9,0 10^4 N/m est placé au fond de la cage d'un ascenseur, dont la masse totale, y compris les passagers, est de 500kg.
Si le câble qui soutient l'ascenseur se rompt lorsque le bas de la cabine est à une hauteur de 25 m au-dessus de l'extrémité supérieure du ressort, de combien celui-ci se comprime-t-il ? (on suppose qu'il n'y a aucun dégât à la cabine).
(4 points)

Puisqu'il n'y a eu aucun dégât, toute l'énergie potentielle gravitationnelle libérée s'est transformée en énergie potentielle élastique dans le ressort

L'énergie potentielle gravitationnelle totale est m g (h+x), où h est la hauteur de 25m au-dessus du ressort, et x la longueur sur laquelle celui-ci se comprime.

$$m\ g\ (h+x)\ =\ 1/2\ k\ x^2 \quad (1)$$

$$k\ x^2\ -\ 2\ m\ g\ x\ -\ 2\ m\ g\ h\ =\ 0 \quad (2)$$

$$x\ =\ \frac{mg\ +\ \sqrt{m^2g^2+2kmgh}}{k}$$

$$x = \frac{5\cdot10^3\ +\ \sqrt{25\cdot10^6+2\cdot9\cdot10^4\cdot5\cdot10^3\cdot25}}{k} \simeq 5/3\ \text{m} = 1{,}7\ \text{m}$$

NB. l'écrasement *x* étant nécessairement petit comparé à la hauteur de chute, on aurait pu approximer (h+x) par h dans (1), ou encore négliger le deuxième terme de la relation (2) devant le troisième, ce qui donne

$$x \simeq \sqrt{2\ m\ g\ h\ /\ k}\ =\ 5/3\ m$$

PHYS-F-104
Physique
Examen du 19 août 2009
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Exprimez les unités des grandeurs suivantes en utilisant les unités fondamentales du Système international
(4 points)
a. poids ………………………………………………………………………..…………
b. coefficient de frottement cinétique ………………………………………………
c. moment d'une force de frottement ………………………………………………
d. moment cinétique ………………………………………………………………

a. poids ………………………………………………	kg m s^{-2}
b. coefficient de frottement cinétique ………………	sans unités
c. moment d'une force de frottement ………………	kg m^2 s^{-2}
d. moment cinétique ……………………………..…	kg m^2 s^{-1}

2. Soit un corps animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération s'exprime en fonction du temps selon la loi empirique : a = A /t^3 + B, où A et B sont des constantes

a. Quelles sont les unités de A et B, exprimées dans le système international ?
b. Quelle est la loi donnant la vitesse en fonction du temps ?

(4 = 2+2 points)

a. $[A] = m\ s^{-2}\ s^3 = ms \quad [B] = m\ s^{-2}$
b. $v = -1/2\ A\ t^{-2} + B\ t + v_0$

3. Quelle est la hauteur maximale *h* (mesurée par rapport à la surface de la Terre) atteinte par une fusée lancée verticalement de la surface de la Terre à la vitesse v_0 ? Notez *G* la constante de Newton, *M* la masse de la Terre, *m* la masse de la fusée, *R* le rayon de la Terre.
On ne tient pas compte de la rotation de la Terre et on néglige les frottements.
(4 points)

Conservation de l'énergie cinétique + potentielle, le potentiel gravitationnel (champ de gravitation variable) étant donné par U = – GMm/r, et le point de hauteur maximale étant caractérisé par une vitesse nulle :

$$1/2\ m\ v_0^2 - GMm/R = -GMm/(R+h)$$

On ramène au même dénominateur

$$1/2\ v_0^2\ R\ (R+h) - GM\ (R+h) + GM\ R = 0$$

On met h en évidence, et on trouve

$$h = \frac{v_0^2 R^2}{2GM - v_0^2\ R}$$

4. Un tonneau de 1,00 m de diamètre et rempli d'eau jusqu'à une hauteur de 2,5 m est posé en hauteur. On laisse s'échapper l'eau par un trou de 1,0 cm de diamètre situé au fond du tonneau. Pourquoi peut-on, pour calculer la vitesse à laquelle l'eau s'écoule du tonneau, négliger la vitesse à laquelle baisse le niveau de l'eau dans le tonneau ?
(3 points)

Par l'équation de continuité, le rapport de la vitesse à laquelle l'eau baisse à la vitesse d'écoulement par le trou est égal à l'inverse du rapport des sections, soit l'inverse du rapport des carrés des diamètres, soit encore ici 10^{-4}, ce qui est bien au-delà de la précision sur les données du problème :

$$v_h S_h = v_b S_b \Rightarrow \frac{v_h}{v_b} = \frac{S_b}{S_h} = \frac{R_b^2}{R_h^2} = \frac{0{,}01^2}{1} = 10^{-4}$$

5. La force électrique exercée par une particule ponctuelle *1* de charge q_1 sur une particule ponctuelle *2* de charge q_2 de signe opposé est une force attractive, donnée par la formule

$$\vec{F} = -K\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\vec{1}_r$$

où le vecteur unité est dirigé de la particule *1* vers la particule *2* et *r* est la distance entre les deux particules.
a) Pourquoi y a-t-il un signe – dans la formule ?
b) Cette force peut-elle être décrite par un potentiel ?
c) Calculez l'énergie potentielle de la particule *2* dans le champ de la particule *1*, si on pose que le potentiel est nul à l'infini.
(5 = 1+1+3 points)

a) Comme la force exercée sur *1* est attractive, elle doit être dirigée dans le sens opposé à celui du vecteur allant de 2 vers 1.
b) C'est une force centrale, donc conservative, donc on peut définir un potentiel.
c) La différence d'énergie potentielle entre les points *i* et *f* est donnée par

$$\Delta E_P = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_i^f \left(-K\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\vec{1}_r\right)\cdot d\vec{r} = \int_i^f K\frac{|q_1||q_2|}{r^2}dr = -K|q_1||q_2|\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)$$

Si le potentiel est pris comme nul à l'infini, c'est-à-dire $1/r_i = 0$, on a

$$E_P = -K\frac{|q_1||q_2|}{r}$$

Examen du 19 août 2009
II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Au périhélie, la distance entre la Terre et le Soleil est de 1,471 10^8 km, et elle est de 1,521 10^8 km à l'aphélie.
En supposant le Soleil immobile, quelle est la différence de vitesse de la Terre entre l'aphélie et le périhélie.
La masse du Soleil est de 1,99 10^{30} kg, celle de la Terre de 5,97 10^{24} kg, la vitesse moyenne de la Terre 29,78 km/s, la constante de la gravitation de Newton 6,67 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}.
On néglige tous les effets perturbateurs (marées, autres planètes, etc.)
[Pensez à utiliser la formule $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$]
(4 points)

L'énergie mécanique totale du système est constante :
$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$
où l'énergie potentielle gravitationnelle est donnée par $E_p = - G\, M\, m / R$, où M est la masse du Soleil et m celle de la Terre (qui disparaît dans le calcul ultérieur).
On a donc
$$E_{c2} - E_{c1} = GMm(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$$
$$v_2^2 - v_1^2 = 2GM(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$$
$$v_2 - v_1 = \frac{2GM}{v_2 + v_1}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) = \frac{GM}{v_m}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$$
Exprimer toutes les constantes dans les mêmes unités.
Réponse numérique : 0.996 km/s

2. Déterminez la fréquence de l'oscillation d'une pierre suspendue à une corde, l'amplitude des oscillations étant de 3,0° et la vitesse maximum de la pierre de 0,20 m/s. On néglige les frottements.
(4 points)

La vitesse maximale est au point le plus bas, où l'énergie potentielle est minimale (on la prend nulle). Au point le plus haut, l'énergie potentielle est *mgh* et l'énergie cinétique est nulle.
En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on trouve la longueur de la corde, sachant que la hauteur h dont s'élève la pierre est donnée par h = L (1 – cosθ) :
$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = L(1-\cos\vartheta) \Rightarrow L = \frac{v^2}{2g(1-\cos\vartheta)}$$
Connaissant la longueur de la corde, on trouve la fréquence, qui est l'inverse de la période :
$$f = 1/T = \sqrt{g/L}\,/\,2\pi = \sqrt{\frac{2g^2(1-\cos\vartheta)}{v^2}}\,/\,2\pi = 0,42\ s^{-1}$$

3. Une balle de caoutchouc dont la masse est de 70 g rebondit de manière parfaitement élastique sur une autre balle, qui est immobile, et elle repart en sens opposé avec une vitesse qui est le tiers de sa vitesse initiale. Quelle est la masse de la seconde balle ? (4 points)

Voir formule du cours, pour le choc élastique d'une boule en mouvement sur une boule immobile :

$$\vec{v}_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i}$$

Ici, $v_{1f} = -1/3\ v_{1i}$ (attention au signe - !)
=> on trouve facilement que $m_2 = 2\ m_1 = 140$ g.

4. Une ambulance est équipée d'un avertisseur sonore qui émet à une fréquence de 1200 Hz.
Un piéton arrêté sur le bord de la route remarque que la fréquence du son qu'il perçoit s'est modifiée de 240 Hz au moment où l'ambulance est passée devant lui.
a) La fréquence a-t-elle augmenté ou diminué ?
b) A quelle vitesse, exprimée en km/h, l'ambulance roule-t-elle ?
La vitesse du son dans l'air est de 340m/s.
(4 points)

La fréquence f_P perçue par le piéton passe de

$$f_P = \frac{v}{v - v_A} f_A$$

à

$$f_P^{'} = \frac{v}{v + v_A} f_A$$

où v est la vitesse du son dans l'air et f_A et v_A sont, respectivement, la fréquence émise et la vitesse de l'ambulance

Au passage de l'ambulance, la fréquence du son diminue (le son devient plus grave).

On a

$$\Delta f = f_P^{'} - f_P = \left(\frac{v}{v + v_A} - \frac{v}{v - v_A}\right) f_A$$

$$\frac{-2vv_A}{(v + v_A)(v - v_A)} = \frac{\Delta f}{f_A} = \Delta ' = \frac{-240 \text{ Hz}}{1200 \text{ Hz}}$$

On résout l'équation du second degré

$$\Delta ' v_A^2 - 2vv_A - v^2\ \Delta ' = 0$$

On trouve $v_A = 33{,}67$ m/s = 121 km/h

5. Les pneus d'un camion, de 1,00 m de diamètre, accomplissent 25 tours pendant que le camion freine uniformément et passe de 80 km/h à 55 km/h.
a) Quelle est l'accélération angulaire des pneus ?
b) Si le camion continue à ralentir de la même manière, combien de temps après le début du freinage s'arrêtera-t-il ?
Attention : justifiez bien les formules que vous utilisez.
(4 points)

L'application de la formule $v = \omega R$ demande une explication. En effet, il faut établir que la vitesse v du camion peut être utilisée.
Cela peut se montrer de la manière suivante.
Pendant que le camion a avancé d'une distance L, ses roues ont parcouru un angle de $\theta = L / R$ radians. A la vitesse v_{camion}, il a parcouru cette distance L en un temps $t = L/ v_{camion}$.
Sur le temps L/ v_{camion}, les roues ont donc parcouru un angle L/R. Elles tournent donc à la vitesse angulaire $\omega = (L/R) / (L/ v_{camion}) = v_{camion} /R$

a) Comme le mouvement est uniformément décéléré, on a la formule

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,(\theta_1 - \theta_0)$$

où $\omega_1 = v_1 / R = 55$ km/h / 0,5 m = 30,555 rad/s
$\omega_0 = v_0 / R = 80$ km/h / 0,5 m = 44,444 rad/s
$\theta_1 - \theta_0 = 25 \cdot 2\pi = 157.08$ rad
=>

$$\alpha = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2(\theta_1 - \theta_0)} = -3.3 \ \ \mathrm{rad/s^2}$$

b) Pour un mouvement uniformément décéléré, on a aussi $\omega_2 - \omega_0 = \alpha\,(t_2 - t_0)$, où $\omega_2 = 0$.
=> $(t_2 - t_0) = -\omega_0 / \alpha = 13$ s

PHYS-F-104
Physique
Examen du 8 janvier 2010
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. On peut énoncer sous deux formes équivalentes la deuxième loi de la mécanique de Newton, qui concerne l'effet des forces sur le mouvement. Enoncez ces deux formes et montrez comment on peut passer de l'une à l'autre.
(3 points)

1. Une force extérieure **F** agissant sur un corps pendant un temps Δt modifie la quantité de mouvement **p** = m**v** du corps de la quantité Δ**p** = **F** Δt
2. Quand $\Delta t \to 0$, **F** = lim (Δ**p** / Δt) = m d**v**/dt = m **a**

2. Enoncez et établissez (« démontrez ») la loi concernant la poussée d'Archimède.
(3 points)

Dans le champ de gravitation, un corps plongé dans un fluide subit une poussée vers le haut égale au poids du fluide déplacé.
Considérons un volume élémentaire de section S et de hauteur h, de masse m
La poussée est égale à la différence des forces exercées par le fluide sur les parois inférieure et supérieure de l'élément de volume :
poussée = $F_{inf} - F_{sup} = p_{inf}\, S - p_{sup}\, S = (p_{sup} + \rho\, g\, h)\, S - p_{sup}\, S = \rho\, V = m$,
où la pression hydrostatique $P = \rho\, g\, h$

3. a. Définissez l'oscillateur harmonique
b. Etablissez l'équation différentielle correspondante
c. Donnez (pas nécessaire de démontrer) la solution générale de l'équation du mouvement.
(4 points)

a. Oscillateur harmonique : la force de rappel est proportionnelle à l'écart par rapport à la position d'équilibre :

$F = - k\, x$

b. => $m\, d^2x / dt^2 + k\, x = 0$

$d^2x / dt^2 + \omega^2 x = 0$

c. $x = A \cos(\omega t + \phi) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$

4. Calculez le moment d'inertie d'un barreau homogène par rapport à son centre. (Définissez les quantités utilisées)
(3 points)

$$I_O = \int_{tige} r^2\, dm \qquad dm = \rho_x\, dx = \frac{M}{L}\, dx$$

$$= 2 \int_0^{L/2} x^2 \frac{M}{L}\, dx = 2 \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} = \frac{1}{12} M L^2$$

5. Montrez que toute force centrale dérive d'un potentiel.
(Définissez les termes utilisés)
(3 points)

Force dérivant d'un potentiel = force pour laquelle une énergie potentielle peut être définie, ne dépendant que de la position = force conservative, dont le travail ne dépend pas du chemin parcouru par le point d'application.
Force centrale : force dirigée vers un point donné, ne dépendant que de la distance à ce point.

Travail d'une force centrale :
$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = [\, F(r)\, \mathbf{1_r}] \cdot d\mathbf{r} = F(r)\, dr$ car $\mathbf{1_r} \cdot d\mathbf{r} = dr$

Le travail élémentaire étant donné par une différentielle exacte (il ne dépend que de la seule variable scalaire r), il existe une fonction primitive qui ne dépend donc que des valeurs initiale et finale de r – c'est la fonction « potentiel »

6. a. Définissez le moment cinétique, par rapport à un point O, d'un système de points matériels.
b. Dans quel cas le moment cinétique d'un système est-il conservé ? (pas besoin de démontrer)
c. Décrivez brièvement et expliquez deux exemples illustrant l'effet de la conservation du moment cinétique.
(4 points)

a. Pour un système de points *i* : $\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
b. Si la somme des moments des forces extérieures par rapport au point O est nulle
c. voir notes :

- accélération de la rotation des patineurs; tornades; pulsars
- loi des aires de Kepler
- ralentissement de la rotation de la Terre (marées) → augmentation de la distance Terre – Lune
- nécessité d'une deuxième hélice pour empêcher rotation sur lui-même d'un hélicoptère
- stabilisation d'un satellite en rotation
- mouvements opposés des bras et des jambes dans saut en longueur
- faire tourner une plate-forme en modifiant le moment d'inertie ; chute d'un chat
- stabilité gyroscopique

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Un bloc de 2,0 kg, initialement au repos à une hauteur de 1,0 m, se met à glisser sur un plan incliné à 30° par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement est de 0,30. Arrivé au bas du plan incliné, le bloc glisse sur un sol sans frottement, puis il vient buter contre une paroi dans laquelle il s'enfonce de 1,00 cm avec une décélération constante. Quelle est la force moyenne exercée par le bloc sur la paroi ?
(4 points)

Forces s'exerçant sur le bloc pendant son mouvement sur le plan incliné :
poids mg, dirigé verticalement
force de frottement, tangentielle au plan, de grandeur μ . N où N = m g cos30

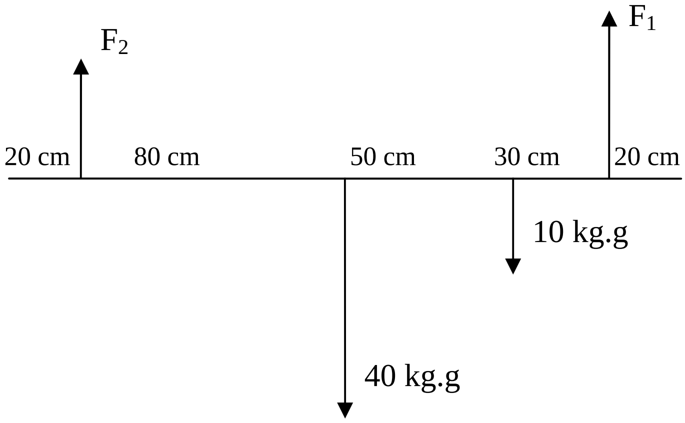
Composantes de ces forces parallèles au plan :
m g sin30 – 0.3 m g cos30 = 4,80 N
Accélération du bloc : a = F / m => a = 2,40 m/s^2

Longueur parcourue sur le plan incliné : 1m / sin 30° = 2m
Vitesse en bas du plan : $v^2 - v_0^2 = 2\ a\ s \Rightarrow\ v^2 = 9{,}60\ m^2/s^2$

Le bloc s'enfonce avec une décélération uniforme : $v^2 - v_0^2 = 2\ a\ s \Rightarrow\ -9{,}60\ m^2/s^2 = 2\ a\ s$, avec s = 0,010 m
=> accélération du bloc a = - 480 m/s^2
La force exercée par le bloc sur la paroi = - force exercée par la paroi sur le bloc (principe d'action-réaction) = - m a = - 2 . (- 480) = 960 kg m/s^2

2. Une poutre homogène longue de 200 cm et dont la masse est de 40 kg repose sur deux supports, disposés à 20 cm de chacune des extrémités de la poutre. Un bloc de 10 kg est posé à 50 cm du centre de la poutre.
Quelles sont les forces exercées respectivement par chacun des deux supports ?
(4 points)

Soit F_1 la force exercée par le support disposé du côté où repose le bloc, et F_2 la force exercée par l'autre support.



Pour des raisons de symétrie, tout se passe comme si le poids de la poutre était concentré au centre.
Somme des forces = 0
$F_1 + F_2 = 50$ kg.g (1)

Par rapport au centre de la poutre, la somme des moments = 0
50 cm . 10 kg.g - 80 cm . F_1 + 80 cm . F_2 = 0 (2)

(2) : F_2 = 21,875 kg.g = 219 N – arrondi à 220 N
(1) : F_1 = 50 g – 22 kg.g = 281 N – arrondi à 280 N

3. Un jardinier arrose son jardin avec de l'eau de pluie recueillie dans un grand tonneau, posé sur le sol. L'eau atteint une hauteur de 1,7 m dans le tonneau. Le robinet auquel est raccordé le tuyau est situé juste au niveau du sol.
a. Quelle direction le jardinier doit-il donner au jet pour qu'il atteigne la distance maximale ?
b. quelle est cette distance ?
(on néglige les frottements et la baisse du niveau de l'eau dans le tonneau au cours de l'arrosage)
(4 points)

a. C'est un problème de balistique : pour une vitesse initiale donnée, la portée maximum est atteinte pour un angle $\theta = 45$ °
b. Théorème de Torricelli : la vitesse de l'eau à la sortie du robinet est $v = (2\ g\ h\ )^{1/2}$
Théorème de balistique : la portée est de $2\ v^2 \sin\theta \cos\theta\ /\ g = 2\ h = 3{,}4$ m

4. On observe, depuis un ascenseur qui est en mouvement rectiligne uniforme vertical de vitesse V, la chute d'un objet de masse *m* lâché depuis le haut d'une tour.
Montrez que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle de l'objet, calculée par un observateur qui est dans l'ascenseur, est constante.
On néglige les frottements et la variation de *g* pendant la chute.
(4 points)

Choisissons l'axe *z* vers le haut.
Dans le référentiel de l'ascenseur, à l'instant t, l'objet se trouve à l'altitude z' et sa vitesse est v'. L'énergie mécanique calculée dans ce référentiel est donc :

$\frac{1}{2}mv'^2 + mg'z'$ où $g = g'$ car le MRU de l'ascenseur par rapport à la Terre ne modifie pas l'accélération

$= \frac{1}{2}m(V+v)^2 + mg(z+Vt)$

$= \frac{1}{2}mV^2 + mVv + \frac{1}{2}mv^2 + mgz + mgVt$

$= \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}mV^2$ car l'accélération est constante $\Rightarrow v = -gt$

$=$ constante puisque $\frac{1}{2}mV^2$ et $\frac{1}{2}mv^2 + mgz$ sont des constantes

Autrement dit :
Si on a choisit pour z = 0 la position initiale de l'objet (haut de la tour), dans un référentiel au repos par rapport à la Terre, l'énergie mécanique est nulle à l'instant initial dans ce référentiel.
Dans le référentiel en mouvement, l'énergie mécanique à l'instant initial est $1/2\ m\ V^2$, puisque la vitesse de l'objet est V dans ce référentiel.
Quand la masse atteint la hauteur *z'*, son énergie calculée dans le référentiel en mouvement est, en utilisant la loi d'addition des vitesses (v' = V + v) et la loi du MRU (z' = z + Vt):

$\frac{1}{2}mv'^2 + mg'z'$ ... voir ci-dessus ...

$= \frac{1}{2}mV^2$ car $\frac{1}{2}mv^2 + mgz =$ 0 = énergie mécanique initiale dans le référentiel au repos

L'énergie mécanique calculée dans le référentiel en mouvement est constante ($= 1/2\ m\ V^2$).

5. Sachant que, dans son mouvement autour de la Terre, la Lune présente toujours à la Terre la même face, déterminez le rapport entre le moment cinétique de rotation de la Lune sur elle-même et son moment cinétique de rotation autour de la Terre.
Pour sa rotation sur elle-même, on considère la Lune comme une sphère homogène, de masse $m = 7{,}35\ 10^{22}$ kg et de rayon r = 1740 km.
Pour sa rotation autour de la Terre, on considère la Lune comme un objet ponctuel et son orbite comme circulaire, de rayon égal à 384 000 km.
Le moment d'inertie par rapport à son centre d'une sphère homogène de masse m et de rayon r est égal à $2/5\ m\ r^2$.
(4 points)

Le moment cinétique L_O de rotation de la Lune sur elle-même est

$L_O(L) = I_O(L)\ \omega_L = 2/5\ m\ r^2\ \omega_L$

où $\omega_L = 2\pi / T_L$ avec T_L la période de rotation de la Lune sur elle-même.

Son moment cinétique de rotation autour de la Terre est

$L_O(T) = I_O(T)\ \omega_T = m\ R^2\ \omega_T$

où $\omega_T = 2\pi / T_T$ avec T_T la période de rotation de la Lune autour de la Terre.

Comme la Lune présente toujours la même face à la Terre, $T_L = T_T$ (= 28 jours).

Le rapport des moments cinétiques est donc :

$L_O(L) / L_O(T) = 2/5\ r^2 / R^2 = 2/5\ (1{,}74 / 384)^2 = 8{,}22\ 10^{-6}$

PHYS-F-104
Physique
Examen du 25 mai 2010
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. En n'utilisant que les unités de base du Système international, donnez les unités
a. du travail
b. de l'énergie potentielle
c. du moment d'une force
Justifiez en donnant chaque fois la formule correspondante.
(3 points)

a. $dW = \mathbf{F.}d\mathbf{r}$ kg m^2 s^{-2}
b. $dU = -dW$ kg m^2 s^{-2}
c. $\boldsymbol{\tau}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ kg m^2 s^{-2}

2. Une particule occupe la position (x, y, z) = (1, 0, 0) m. Son vecteur vitesse a pour composantes (2, 3, 0) m/s et sa masse est de 50 g. Quel est son moment cinétique par rapport à l'origine ?
(4 points)

$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = 0{,}05 \,.\, (1\, \mathbf{1_x} + 0\, \mathbf{1_y} + 0\, \mathbf{1_z}) \times (2\, \mathbf{1_x} + 3\, \mathbf{1_y} + 0\, \mathbf{1_z})$ kg m m/s
$= 0{,}05 \,.\, (\,(1 \,.\, 3 – 0 \,.\, 2)\, \mathbf{1_x} \times \mathbf{1_y} + 0\, \mathbf{1_y} \times \mathbf{1_z} + 0\, \mathbf{1_z} \times \mathbf{1_x}) = 0.15\, \mathbf{1_z}$ kg m^2 s^{-1}

3. Exprimez la vitesse de propagation d'une onde en fonction de sa fréquence (et éventuellement d'autres grandeurs physiques)
(2 points)

$v = \lambda\, \nu$ où v est la vitesse, λ est la longueur d'onde et ν est la fréquence

4. Une sphère peut-elle rouler sans glisser le long d'un plan incliné parfaitement lisse ? pourquoi ?
(2 points)

Non, car le roulement sans glissement se caractérise par le fait que le point de contact de la sphère avec le sol a une vitesse nulle par rapport au sol. Pour cela, un frottement statique est nécessaire. A défaut, la sphère glisse.
Il faut noter que dans le cas où la sphère arriverait en roulant sans glisser sur la partie parfaitement lisse du plan incliné, elle se mettrait aussi à glisser, tout en continuant à tourner sur elle-même. En effet, le moment cinétique serait conservé (moment nul des forces extérieures puisque la force de frottement est nulle et que la force de gravitation passe par le centre de la sphère) et la vitesse angulaire serait donc constante, alors que le mouvement du centre de la sphère serait accéléré.

5. La grandeur de la force de frottement *F* entre un solide et un fluide s'exprime par la relation *F* = *K* v, où v est la vitesse relative entre le solide et le fluide.
Le coefficient *K* a-t-il des unités ? Si oui, quelles sont-elles dans le système international ?
(2 points)

Les dimensions de K sont [F] / [v] = $kg\ m\ s^{-2}$ / $m\ s^{-1}$ = $kg\ s^{-1}$

6. Enoncez en mots et exprimez en formules les lois de la statique.
(4 points)

Pour qu'un système (indéformable) de points matériels reste au repos, il faut et il suffit
- que la somme vectorielle des forces extérieures appliquées au système soit nulle :

$$\Sigma\, \mathbf{F}_{ext} = 0$$

- et que la somme vectorielle des moments des forces extérieures, par rapport à n'importe quel point O, soit nulle :

$$\Sigma\, \boldsymbol{\tau}_O(\mathbf{F}_{ext}) = 0$$

7. Etablissez l'équation de continuité pour un fluide non visqueux et incompressible ; définissez les symboles que vous utilisez.
(3 points)

Pour un fluide incompressible et homogène de masse volumique ρ, les masses Δm_1 et Δm_2 passant à travers deux sections droites d'aires S_1 et S_2 pendant le temps Δt sont égales :

$$\Delta m_1 / \Delta t = \Delta m_2 / \Delta t$$

=> $\rho\, \Delta V_1 / \Delta t = \rho\, \Delta V_2, / \Delta t$ où ΔV_1 et ΔV_2 sont les volumes correspondants, qu'on peut assimiler pour des temps très courts à des cylindres de sections S_1 et S_2 et de hauteurs Δl_1 et Δl_2
Comme $\Delta l_1 / \Delta t = v_1$ et $\Delta l_2 / \Delta t = v_2$, où v_1 et v_2 sont les vitesses d'écoulement à travers les sections S_1 et S_2
=> $S_1 v_1 = S_2 v_2$, l'équation de continuité

.

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Sur une autoroute, des panneaux indiquent que, à une distance de 200 m, la vitesse maximale autorisée sera de 100 km/h.
a. Pour une voiture dont la masse est de 1200 kg et qui roule à 120 km/h, quelle doit être la décélération correspondante, en supposant celle-ci constante ?
b. Quel est le travail des forces de freinage ?
(4 points)

a. Comme le freinage est constant, on peut utiliser la relation $2\ a\ s = v_f^2 - v_0^2$
$\Rightarrow a = (120^2 - 100^2)\ .\ (10^3/3600)^2 / (2\ .\ 200)\ \ m\ s^{-2} = -0{,}849\ m\ s^{-2}$

b. $W = \int \mathbf{F.dl} = m\ a\ s$ car l'accélération **a** est constante et parallèle à la trajectoire
$= -204\ 10^3$ J

2. Un disque horizontal homogène, d'une masse de 1,5 kg et de 10 cm de rayon, peut tourner sans frottement autour de son axe vertical. Il est initialement au repos.
Une balle d'une masse de 10 g, animée d'une vitesse horizontale de 200 m/s, vient frapper tangentiellement le bord du disque et s'y encastre.
Quelle est la vitesse angulaire du disque après la collision, exprimée en nombre de tours par seconde ?
(4 points)

Moment cinétique initial, par rapport à l'axe de rotation, fourni par la balle seule :

$\mathbf{L}_O = \mathbf{r\ x\ p} = R\ m_b\ v_b \sin(90°)$

Moment d'inertie du disque avec la balle encastrée :

$I_O = ½\ M_D\ R^2 + m_b\ R^2$

Conservation du moment cinétique :

$L_O = I_O\ \omega \Rightarrow \omega = 26{,}35$ rad/s = 4,2 tours/s

3. Supposez que la constante gravitationnelle *G* ait varié depuis la formation du système solaire.
Utilisez les lois de la mécanique pour montrer que, pour une trajectoire supposée circulaire de rayon *R* de la Terre autour du Soleil, la quantité *G.R* serait restée constante.
Les masses de la Terre et du Soleil sont supposées constantes.
(4 points)

1. La force gravitationnelle fournit la force centripète :
$m\ \omega^2\ R = G\ M\ m / R^2$, où m est la masse de la Terre et M celle du Soleil
$\Rightarrow \omega^2\ R^3 = G\ M$ (1)
2. Conservation du moment cinétique de la Terre par rapport au centre du Soleil :
$m\ v\ R = m\ \omega\ R^2$ = constante
$\Rightarrow \omega^2\ R^4$ = constante = $G\ M\ R$, par (1)
$\Rightarrow G\ R$ = constante

4. On accroche à un ressort, dont la constante de rappel est 15 N/m, une boule dont la masse est de 100 g.
a. si on laisse le ressort s'allonger tout doucement en soutenant la boule jusqu'à la position de repos, de combien le ressort s'allongera-t-il ?
b. si au contraire on accroche la boule au ressort non allongé et qu'on la lâche brusquement, jusqu'où la boule descendra-t-elle ?
c. dans ce cas, en quel point l'accélération de la boule est-elle la plus grande et combien vaut-elle en ce point ?
d. en quel point la vitesse de la boule est-elle la plus grande et que vaut-elle ?
(4 points)

a. A la nouvelle position d'équilibre, la force de rappel compense exactement le poids :
$k \Delta l = m g \Rightarrow \Delta l = m g / k = 0{,}067$ m

b. Conservation de l'énergie : $E_p(g) + E_p(\text{rappel}) + E_{cin}$ = constante
On convient de mesurer l'énergie potentielle gravitationnelle par rapport au point le plus bas
au point le plus haut : $E = m g \Delta L + 0 + 0$ (vitesse nulle)
au point le plus bas : $E = 0 + ½ k (\Delta L)^2 + 0$ (vitesse nulle)
$\Rightarrow \Delta L = 2 m g / k = 0{,}13$ m
On remarque que $\Delta L = 2 \Delta l$: comme vu au cours, le mouvement est symétrique par rapport au nouveau point d'équilibre.

c.
- au point le plus haut, la seule force est la force gravitationnelle, l'accélération vaut g et elle est dirigée vers le bas (on oriente l'axe vers le bas).
- ailleurs, la résultante des forces est égale à somme de la force gravitationnelle (dirigée vers le bas) et de la force de rappel (dirigée vers le haut).
- la somme s'annule au point d'équilibre, et au-delà de ce point, la force de rappel surpasse la force gravitationnelle ; la résultante est dirigée vers le haut.
- cette résultante dirigée vers le haut est la plus grande là où la force de rappel est la plus grande, c'est-à-dire au point le plus bas. En ce point, la force résultante est $F = mg - k \Delta L = mg - k \cdot 2 m g / k = -g$

La norme de la force (et donc de l'accélération) est donc la même, et maximale, aux deux extrémités du mouvement. Ceci est conforme au fait que le mouvement est symétrique par rapport au nouveau point d'équilibre.

d. la résultante des forces, dirigée vers le bas, est non nulle jusqu'au point d'équilibre (où elles se compensent). Du point le plus haut jusqu'au point d'équilibre, l'accélération et la vitesse sont donc orientées dans le même sens, et le mouvement vers le bas est donc de plus en plus rapide.
A partir du point d'équilibre, la résultante des forces est orientée vers le haut, alors que la vitesse est orientée vers le bas. La grandeur de la vitesse diminue donc.
La vitesse est donc la plus grande au point d'équilibre.
Elle est donnée par la conservation de l'énergie (on mesure l'énergie potentielle par rapport au point d'équilibre) :
au point le plus haut : $E = m g \Delta l + 0 + 0 = m g \cdot m g / k$
au point d'équilibre : $E = 0 + ½ k (\Delta l)^2 + ½ m v^2 = ½ k (m g / k)^2 + ½ m v^2$
$\Rightarrow v^2 = 2 m g^2 / k - m g^2 / k = m g^2 / k = g \Delta l$
$\Rightarrow v = 0{,}82$ m/s

5. Une personne, située à 2,50 m du centre, parvient à rester debout sur une plateforme qui effectue 15 tours par minute.
a. Quelle est la vitesse de la personne par rapport à la terre ?
b. Quel doit être le coefficient de frottement de ses chaussures ?
(4 points)

a. $v = \omega R = 15 \cdot 2\pi \cdot 2{,}5\text{m} / 60\text{ s} = 3{,}9\text{ m/s}$
b. La force de frottement vaut $F_f \leq \mu_s N = \mu_s m g$
Elle fournit la force centripète $F_c = m\,\omega^2 R$
$\Rightarrow \mu_s \geq m\,\omega^2 R / m g$
$\Rightarrow \mu_s \geq 0{,}62$

PHYS-F-104
Physique
Examen du 18 août 2010
I. Théorie (20 points – 1 heure)

1. Donnez la loi de Hooke pour un ressort et établissez son énergie potentielle, en définissant les symboles utilisés.
(3 points)

L'élongation $\vec{s}$ d'un ressort est proportionnelle à la force $\vec{F}_e$ exercée : $\vec{F}_e = k\,\vec{s}$

La force de rappel étant donc $\vec{F} = -k\,\vec{s}$, l'énergie potentielle est

$$E_P = -\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int k\,\vec{s}\,d\vec{s} = \int k\,s\,ds = \tfrac{1}{2}k\,s^2$$

2. Enoncez sous forme d'une formule la loi de la gravitation de Newton, en définissant les symboles utilisés.
(3 points)

$\mathbf{F_G} = - G\, M\, m / r^2\, \mathbf{1_r}$
où $\mathbf{F_G}$ est la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps de masses M et m, r la distance entre eux, $\mathbf{1_r}$ le vecteur unitaire dirigé du corps qui exerce la force d'attraction gravitationnelle vers le corps qui subit la force, et G une constante universelle

3. Démontrez que si un corps sur lequel s'appliquent 3 forces extérieures, situées dans un même plan et non parallèles, est au repos, alors ces forces sont concourantes.
(3 points)

Puisque le corps est au repos, la somme des moments des forces extérieures par rapport à n'importe quel point doit être nulle (loi de la statique).
Considérons le point O défini par l'intersection des droites portant deux des forces. Les moments de ces deux forces par rapport à O est nul.
Le moment de la troisième force par rapport à O doit donc être nul également ; la droite portant cette force doit donc également passer par O.

4. a. Les satellites en orbite géostationnaire peuvent-ils être positionnés à n'importe quelle latitude ? Justifiez la réponse.
b. Peuvent-ils être positionnés à n'importe quelle altitude ? Justifiez.
(4 points)

a. Non, ils doivent se trouver au-dessus de l'équateur.
Ils doivent rester à la verticale d'un point donné de la surface de la Terre. Ce point décrit des cercles autour de l'axe de rotation de la Terre.
Or l'orbite d'un satellite se trouve dans un plan passant par le centre d'attraction, ici le centre de la Terre.

Le seul plan contenant le centre de la Terre et perpendiculaire à son axe de rotation est l'équateur (seul cas où un « petit cercle » est aussi un « grand cercle »).
b. Non.
La force centripète qui s'exerce sur le satellite est $F_c = m\,\omega^2 R$, où R est la distance au centre de la Terre et ω la vitesse angulaire de la rotation, avec $\omega = 2\,\pi R / T$ et la période T = 1 jour.
Cette force centripète est la force d'attraction gravitationnelle, qui vaut $F_G = G\,M_T\,m / R^2$.
L'égalité de F_c et F_G fixe la valeur de R.
(cf. loi de Kepler)

5. Pour un mouvement circulaire, quelle est la relation entre la composante tangentielle de l'accélération et la vitesse ?
Faites la démonstration en partant de la définition de l'accélération.
(3 points)

La composante tangentielle de l'accélération est la dérivée par rapport au temps de la vitesse scalaire :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|\,\vec{1}_V)}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt}\vec{1}_V + |\vec{v}|\frac{d(\vec{1}_V)}{dt} \quad \text{où} \quad \vec{1}_V = \vec{1}_T$$

; la dérivée du vecteur unitaire tangent est selon la normale au mouvement

$$= \frac{d(|\vec{v}|)}{dt}\vec{1}_T + |\vec{v}|\,\omega\,\vec{1}_N$$

$$\Rightarrow \quad a_T = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt}$$

6. Enoncez avec précision deux lois de conservation en mécanique.
(4 points)

Pour un système qui n'est soumis à aucune force extérieure, la quantité de mouvement totale est constante au cours du temps.

Pour un système pour lequel la somme des moments des forces extérieures est nul, le moment cinétique total est constant au cours du temps.

En l'absence de forces non conservatives, la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles d'un système isolé est constante au cours du temps.

II. Exercices (20 points – 2 heures)

1. Une balle dont la masse est 50 g et le volume 300 cm^3 est tenue dans une piscine à 60 cm sous la surface de l'eau, puis est lâchée brusquement.
Jusqu'à quelle hauteur au-dessus de la surface la balle va-t-elle sauter ?
La masse volumique de l'eau est 1,00 g cm^{-3}.
Pour simplifier le problème, on suppose que la balle sort de l'eau d'un coup, et on néglige tous les frottements. (Le résultat obtenu montre que ces hypothèses ne sont pas réalistes !)
(4 points)

Tant qu'elle est dans l'eau, la balle est soumise à deux forces : son poids P et la poussée d'Archimède A, égale au poids du volume d'eau correspondant à celui de la balle. On prend l'axe vertical orienté vers le haut

$P = - m\ g = - 0{,}050$ kg. $10\ ms^{-2} = 0{,}50$ N

$A = V\ \rho\ g = 3{,}0$ N

$F = 2{,}5$ N

Comme cette force est constante, le mouvement est uniformément accéléré, et la vitesse de la balle après la distance s quand elle sort de l'eau est :

$v^2 = 2\ a\ s$, où $a = F / m = 50\ ms^{-2}$

$\Rightarrow v^2 = (2 . 50 . 0{,}60) = 60\ (m/s)^2$

La balle s'élèvera dans l'air d'une hauteur h, où l'énergie potentielle m g h sera égale à l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\ m\ v^2$ de la balle au moment où la poussée cesse :

$m\ g\ h = \frac{1}{2}\ m\ v^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\ v^2 / g = \frac{1}{2}\ 60 / 10{,}0 = 3{,}0$ m

2. On veut soulever une pierre de 300 kg.
Pour ce faire, on glisse sous elle une barre de fer longue de 1,00 m et pesant 25 kg, et l'on prend appui sur une brique située le long de la barre à 15 cm du bout, du côté de la grosse pierre.
La barre fait à ce moment un angle de 10 degrés avec l'horizontale.
Quelle force perpendiculaire à la barre faut-il exercer à l'autre extrémité de celle-ci pour soulever la pierre ?
(4 points)

Trois forces sont en jeu ; on repère leur point d'application par rapport au point d'appui de la barre :

- le poids $\mathbf{P_P}$ de la pierre s'exerce à -0,15 m du point d'appui ; il est dirigé verticalement et fait donc un angle de 80° avec la barre.
- le poids $\mathbf{P_b}$ de la barre s'exerce en +0,35 m du point d'appui ; il est également dirigé verticalement et fait un angle de 80° avec la barre.
- l'effort **F** s'exerce en +0,85 m du point d'appui ; il fait un angle de 90° avec la barre

Pour que la pierre se mette à bouger, il faut que le moment des forces exercées du côté où s'exerce l'effort soit supérieur au moment des forces exercées du côté de la pierre.

$P_b . 0{,}35 . \sin(80) + F . 0{,}85 . \sin(90) > P_P . 0{,}15 . \sin(80)$

$25 . 10{,}0 . 0{,}35 . 0{,}9848 + F . 0{,}85 > 300 . 10{,}0 . 0{,}15 . 0{,}9848$

$F > (450 – 87{,}5) . 0{,}9848 / 0{,}85 = 420$ N

3. Une bicyclette dont les roues font 62 cm de diamètre roule à 18 km/h. Le poids total du cycliste et de la bicyclette est de 750 N.
La bicyclette s'arrête après avoir freiné uniformément sur 12 m, les freins agissant sur les jantes à 28 cm du centre des roues.
Quelle est la force exercée par les freins ?
On néglige tous les frottements autres que ceux exercés par les freins ; on néglige le moment d'inertie des roues.
(4 points)

Le travail des forces de frottement est égal à la perte d'énergie cinétique de la bicyclette, soit $W = \frac{1}{2}\ m\ v^2$.

On sait que, comme le point de contact de la roue avec le sol est immobile par rapport à celui-ci, la distance D parcourue par chaque point des roues est la même que celle parcourue par la bicyclette dans son ensemble.

La longueur L sur laquelle les freins ont frotté sur la jante est donnée par cette distance D, multipliée par le rapport des rayons des jantes et des roues
=> L = D . 28 / 31 = 10,84 m.
La force exercée par les freins est tangente au mouvement de la roue ; comme le freinage est uniforme, la force de freinage est constante.
Le travail de la force de frottement est donc W = F d, où d est la distance de freinage.
On a donc $F = ½ m v^2 / L$ où la masse m est égale au poids divisé par g
=> $F = ½ (750 / 10,0) . 18^2 (1000/3600)^2 / 10,84 = 86$ N

4. Une ultracentrifugeuse, partant du repos, atteint 90 000 tours / minute en 200 secondes, avec une accélération angulaire constante. Le diamètre du rotor est de 10,0 cm.
a. Quelle est sa vitesse angulaire après 75 secondes ?
b. Combien de tours le rotor a-t-il effectué lorsque la vitesse de rotation maximale est atteinte ?
c. A ce moment , quelle est l'accélération maximale subie par une particule se trouvant dans le rotor, exprimée en termes d'accélération de la pesanteur *g* ?
d. Quelle est la vitesse linéaire d'une telle particule ?

a. La vitesse angulaire ω est donnée en fonction de l'accélération angulaire constante α par
$\omega = \alpha \Delta t$
=> $\alpha = \omega / \Delta t$ = (90 000/60 tours/s) / 200s = 7,5 tours/s^2
La vitesse angulaire ω_1 atteinte après 75 s est donnée par
$\omega_1 = \alpha \Delta t_1$ = (90 000/60) . 75 / 200 = 56 10^1 tours/s
b. Le nombre de tours après 200 sec. est donné par
$\theta = ½ \alpha \Delta t^2 = ½\ 7,5 . 200^2 = 15\ 10^4$ tours
c. L'accélération centripète est donnée par $a = \omega^2 R$. Elle est maximale pour le rayon R le plus grand possible
=> $a_{max} = \omega_{max}{}^2 . R_{max}$ = (90 000/60 . 2π rad/s)^2 . 0,05 m = 44 10^5 ms^{-2} = 44 10^4 g
d. $v = \omega R$ = (90 000/60 . 2π rad/s) . 0,05 m = 0,47 km/s

5. De l'eau coule à la vitesse de 1,0 m/s dans un tuyau d'arrosage de 2,0 cm de diamètre. Elle en sort par un bec dont l'ouverture a un diamètre de 0,50 cm et qui est dirigé verticalement. Si on néglige les frottements, à quelle hauteur le jet peut-il monter ?
(4 points)

Equation de continuité : $S_1 v_1 = S_2 v_2$
La section allant comme le carré du diamètre, la vitesse du jet à la sortie du tuyau est de 16 m/s.
Théorème de Torricelli (dérivé du théorème de Bernouilli) pour les points 1 (sortie du tuyau) et 2 (hauteur maximale du jet)

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

où $P_1 = P_2$ = pression atmosphérique
v_1 = 16 m/s $v_2 = 0$
$y_1 = 0$ (bas du jet)
=> $1/2\ v_1^2 = g\ y_2$ => y_2 = 13 m